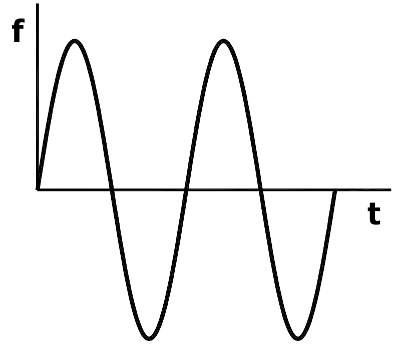
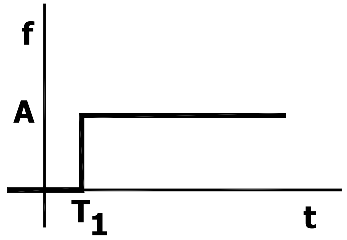
Tema 4

Ondas de Señal:

Onda Alterna Senoidal

Ondas de señal





Onda Senoidal

Onda Escalon

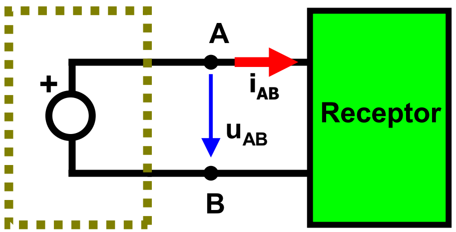
$f = E_0 \operatorname{sen} (\omega t + \varphi)$

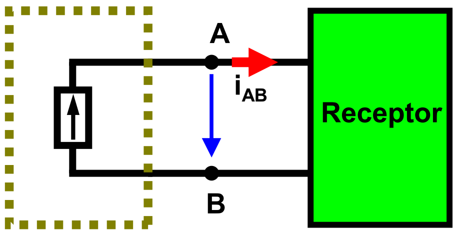
E_0 es la amplitud
ω es la pulsación
$\omega t + \varphi$ es el ángulo de fase
φ es el ángulo de fase inicial

$f = 0 \quad t < T_1$
$f = A \quad t > T_1$

T_1 = T. de escalón
A = Amplitud

Ondas de Señal: Ondas de Excitación y Respuesta



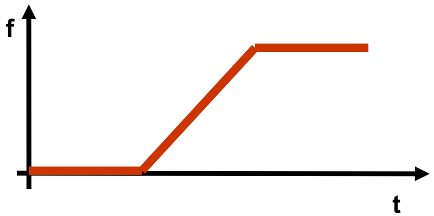


Excitación: u(t) Respuesta: u(t) i(t)

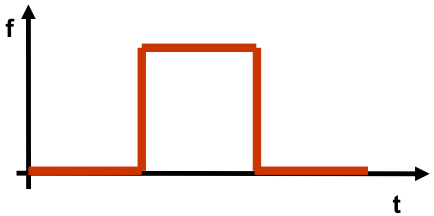
Excitación: i(t) Respuesta: u(t) i(t)

Ondas de señal: Onda alterna senoidal

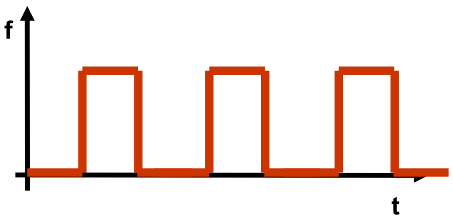
Una onda es una gráfica o ecuación que da una descripción completa de la señal en función del tiempo



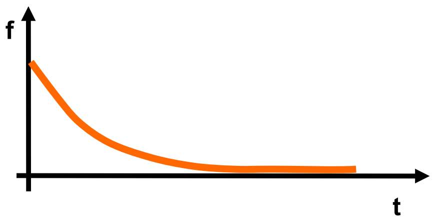
Función rampa modificada



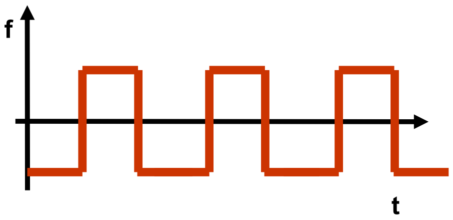
Pulso rectangular



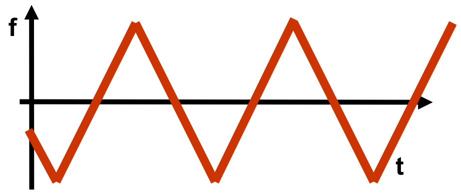
Tren de impulsos



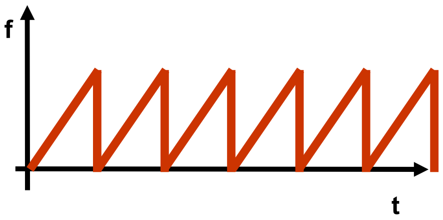
Exponencial



Onda rectangular



Onda Triangular



Diente de sierra

4.1.- CLASIFICACIÓN DE ONDAS

Según signo de la magnitud:

- ***Bidireccional:*** **Polaridad de la magnitud (+) y (-) y cambia con el tiempo.**

  Ejemplos: onda senoidal, triangular, etc.

- ***Unidireccional:*** **Polaridad única.**

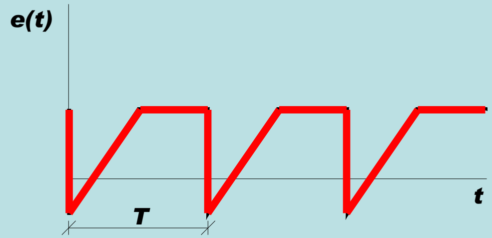
  Ejemplos: tren de impulsos, onda exponencial, dientes de sierra, etc.

En electrotecnia: onda bidireccional senoidal
onda exponencial
escalón unitario
la función rampa.

4.1.- CLASIFICACIÓN DE ONDAS

Según repetición del valor de la magnitud con el tiempo:

Funciones periódicas: **El valor de magnitud se repite con el tiempo a intervalos iguales**:



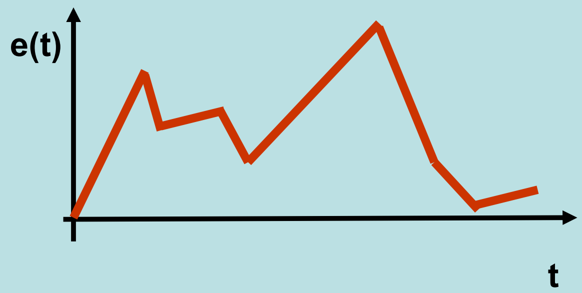
$$e = f(t) = f(t + nT)$$

Es decir, la función se repite cada vez que transcurre un tiempo **T** llamado **PERÍODO**; **n** ha de ser entero.

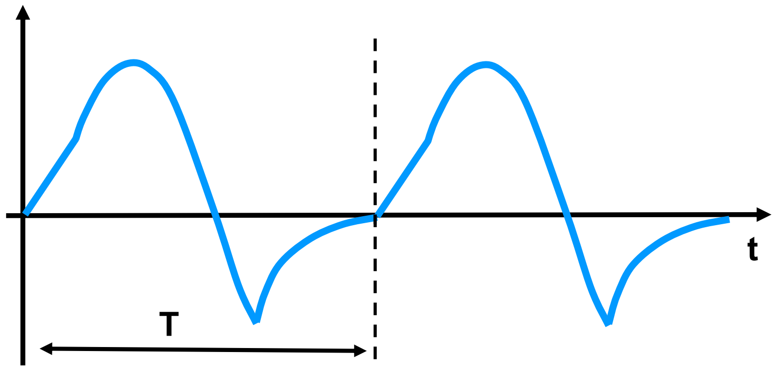
4.1.- CLASIFICACIÓN DE ONDAS

Según repetición del valor de la magnitud con el tiempo:

Funciones no periódicas: **Son aquéllas en el que el valor que toma la función es arbitraria con el tiempo.**



Valores que definen una onda periódica.

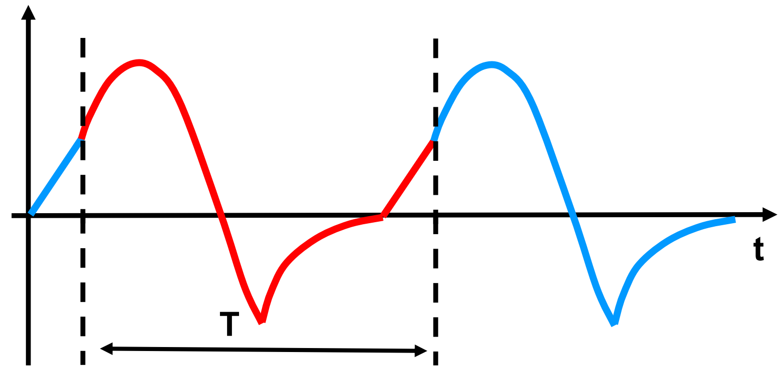


Periodo: Tiempo T que tarda en repetirse la función

Ciclo: Parte de una onda comprendida entre t y t+T

Cada ciclo está descrito por su propia ecuación

Valores que definen una onda periódica.

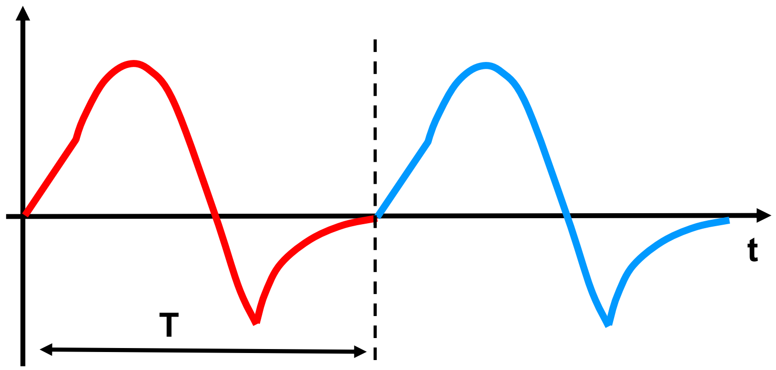


Periodo: Tiempo T que tarda en repetirse la función

Ciclo: Parte de una onda comprendida entre t y t+T

Cada intervalo está descrito por su propia ecuación

Valores que definen una onda periódica.

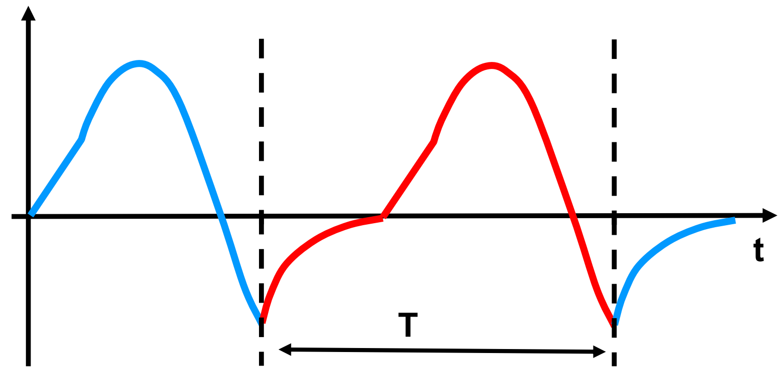


Periodo: Tiempo T que tarda en repetirse la función

Ciclo: Parte de una onda comprendida entre t y t+T

Cada intervalo está descrito por su propia ecuación

Valores que definen una onda periódica.

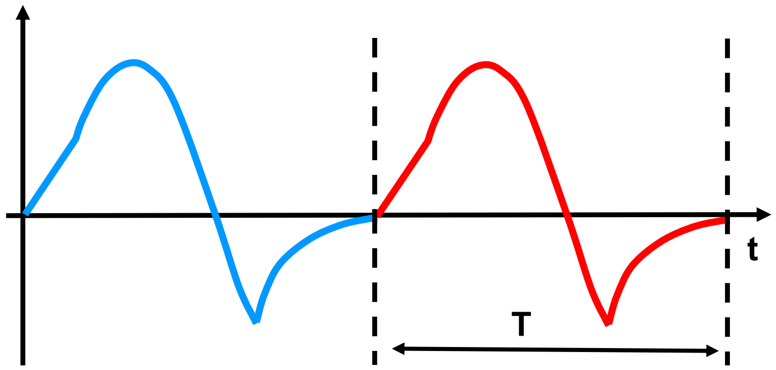


Periodo: Tiempo T que tarda en repetirse la función

Ciclo: Parte de una onda comprendida entre t y t+T

Cada intervalo está descrito por su propia ecuación

Valores que definen una onda periódica.

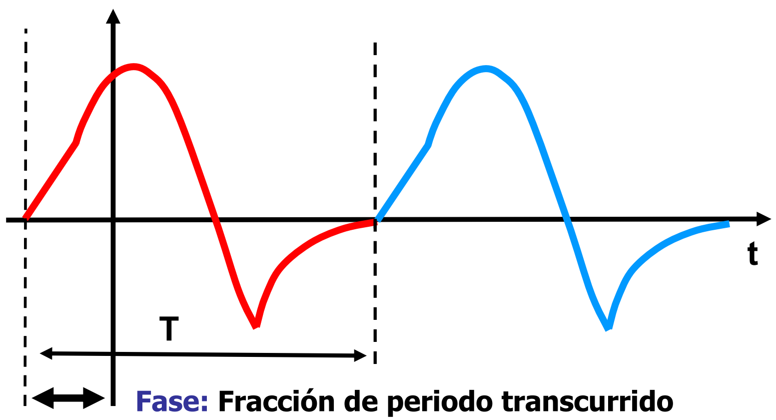


Periodo: Tiempo T que tarda en repetirse la función

Ciclo: Parte de una onda comprendida entre t y t+T

Cada intervalo está descrito por su propia ecuación

Valores que definen una onda periódica.



Fase: Fracción de periodo transcurrido desde el instante que tomamos como referencia

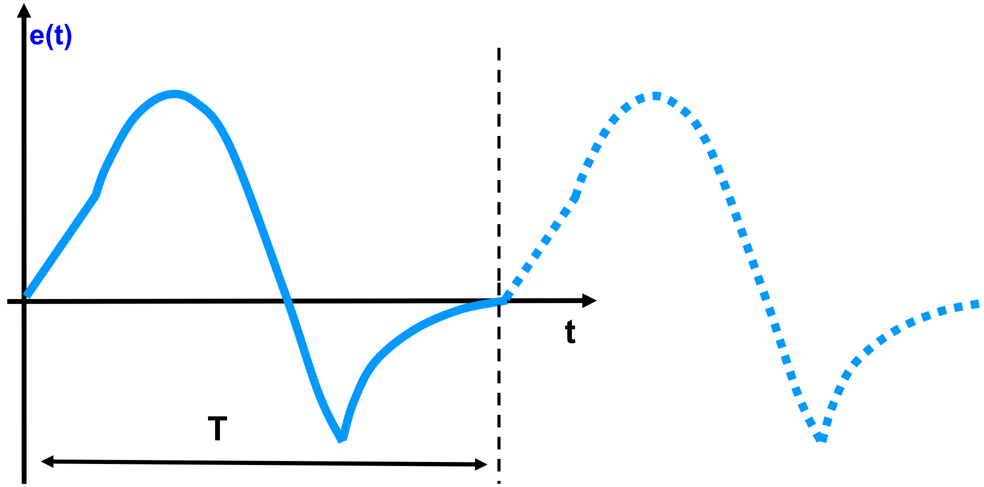
1 sg

Frecuencia: Numero de ciclos que se repite la onda en la unidad de tiempos $f \cdot T = 1$

4.2.- Valores asociados a las Ondas periódicas.

Son índices asociados a un ciclo

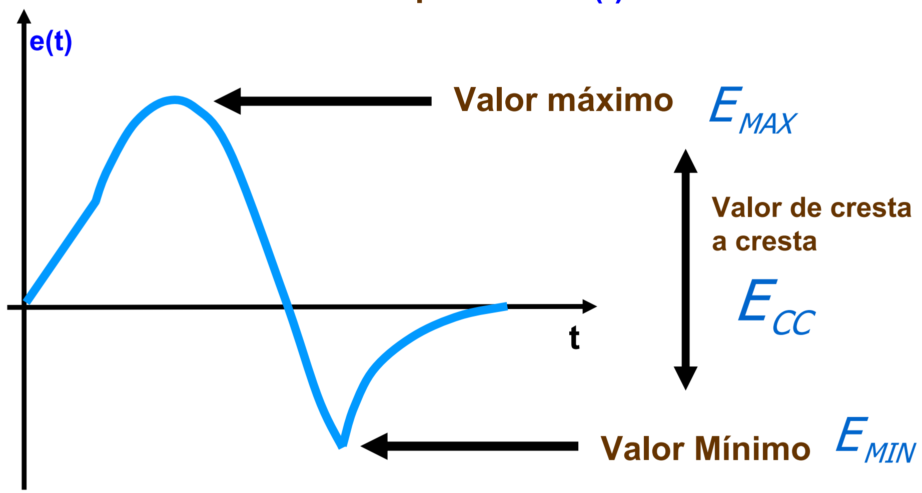
Consideremos una onda periódica e(t):



4.2.- Valores asociados a las Ondas periódicas.

Son índices asociados a un ciclo

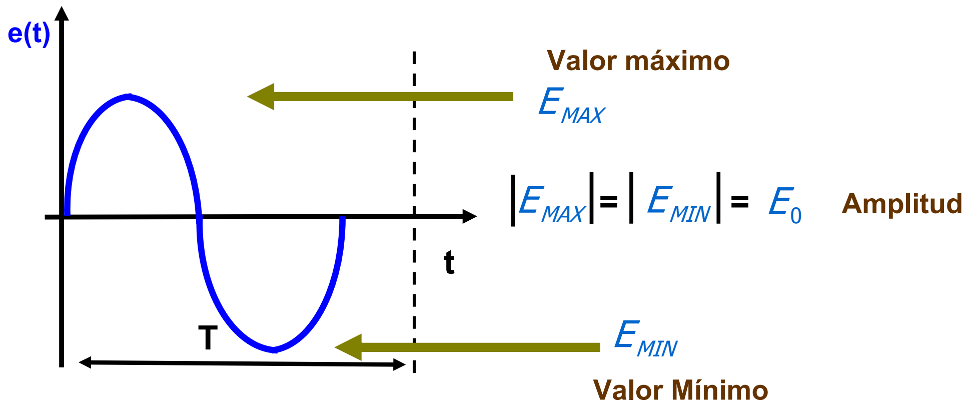
Consideremos una onda periódica e(t):



4.2.- Valores asociados a las Ondas periódicas.

Son índices asociados a un ciclo

En una onda simétrica se habla de amplitud:



4.2.- Valores asociados a las Ondas periódicas.

Valor medio

$$E_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\,dt$$

Factor de Cresta

$$F_C = \frac{E_{Max}}{E_{ef}}$$

Valor eficaz

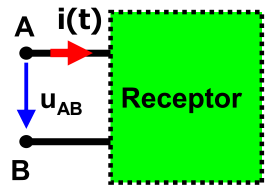
$$E_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e(t)^2\,dt}$$

Factor de Forma

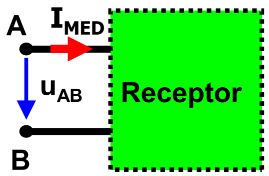
$$F_f = \frac{E_{ef}}{E_{med}}$$

Significado electrotécnico del valor medio de i(t) $\quad I_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt$

(Variable: Carga transportada o almacenada, i = dq/dt)



$$Q_1 = \int_0^T i(t)\,dt$$



$$Q_2 = \int_0^T I_{MED}\,dt = I_{MED}\,T$$

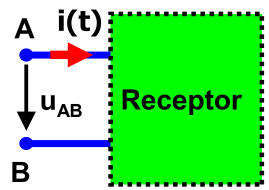
Suponiendo $Q_1 = Q_2$

$$I_{MED}\,T = \int_0^T i\,dt$$

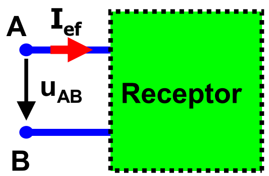
$$\boxed{I_{MED} = \frac{1}{T}\int_0^T i\,dt}$$

Significado electrotécnico del valor eficaz de i(t) $\quad I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$

(Variable: Energía consumida o transportada, dw = p dt)



$$w_1 = \int_0^T R\,i^2 dt = R\int_0^T i^2 dt$$



$$w_2 = \int_0^T R\,I^2 dt = R\,I^2\,T$$

Suponiendo $W_1 = W_2$

$$R\int_0^T i^2\,dt = R\,I^2\,T$$

$$\boxed{I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}}$$

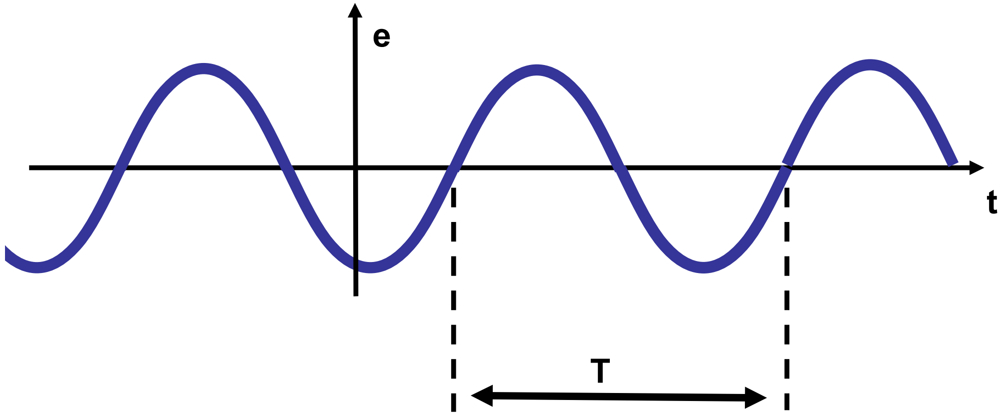
4.2.- Valores asociados a las Ondas periódicas.

Nomenclatura de los valores asociados a las magnitudes eléctricas:

	Magnitudes			
Valores asociados	Intensidad	Tensión	f.e.m	Potencia
	$i(t)$	$u(t)$	$e(t)$	$p(t)$
V. eficaz	I	U	E	
V. medio	I_m	U_m	E_m	P
Amplitud	I_0	U_0	E_0	P_0
V. máximo	I_{MAX}	U_{MAX}	E_{MAX}	P_{MAX}
V. mínimo	I_{MIN}	U_{MIN}	E_{MIN}	P_{MIN}
V. de cresta a cresta	$I_{CC} = I_{PP}$	$U_{CC} = U_{PP}$	$E_{CC} = E_{PP}$	$P_{CC} = P_{PP}$
Factor de cresta	F_C	F_C	F_C	
Factor de forma	F_F	F_F	F_F	

4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

$$e(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$



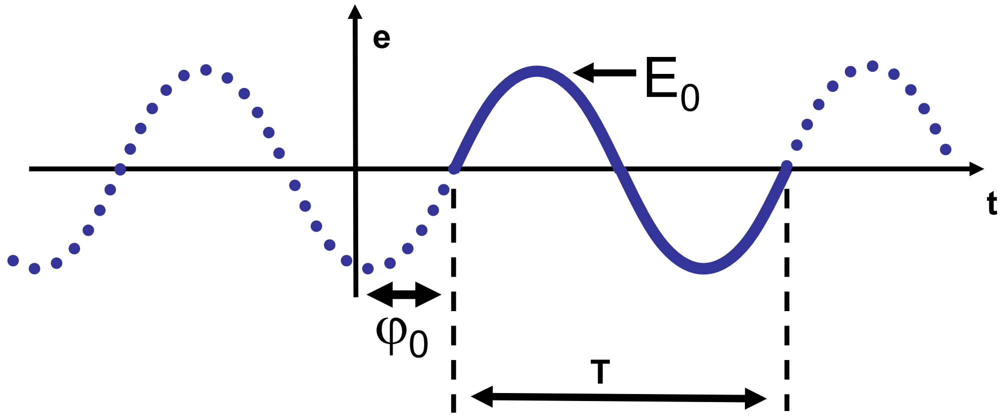
4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

$$\boxed{e(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)}$$

- E_0 es la amplitud (valor máximo de la función)
- ω es la pulsacion (rad/s)
- $(\omega t + \varphi_0)$ angulo de Fase
- φ_0 Fase inicial (**grados**)
- **e(t)** es el valor que toma la función en un instante, es el valor instantáneo

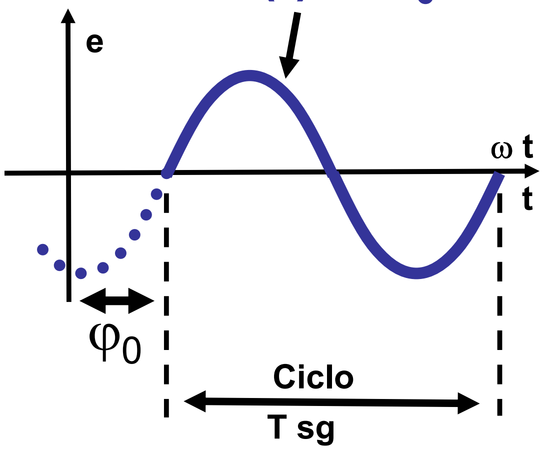
4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

$$e(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$



4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

$$e(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$



ω T rad = 2 π rad

Periodo $T = 2\pi/\omega$ (s)

Frecuencia $f = 1/T$ (Hz)

Pulsación $\omega = 2\pi f$ (rad/s)

f red Europa: 50 Hz

f red Canada, E.E.U.U. 60 Hz

4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

Ventajas Matemáticas:

- Se puede derivar e integrar repetidamente y seguir siendo una senoide de la misma frecuencia. (cambia la amplitud y el ángulo de fase).

$$i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t) \rightarrow di/dt = I_0\omega \cos(\omega t) = I_0\, \omega \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2)$$

$$\int i\,dt = \frac{I_0}{\omega}(-\cos(\omega t)) = \frac{I_0}{\omega} \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

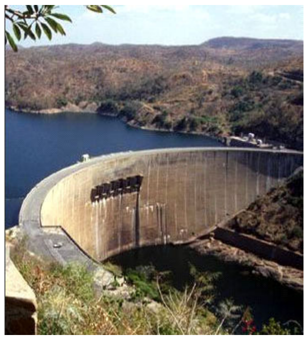
- La suma de ondas senoidales de igual frecuencia es otra onda senoidal de igual frecuencia pero de parámetros diferentes (valor máximo o mínimo o también de cresta).

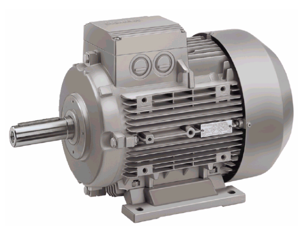
$$\begin{array}{rl} & a(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_A) \\ + & b(t) = B_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_B) \\ \hline & c(t) = C_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_C) \end{array}$$

4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

Ventajas Tecnológicas:

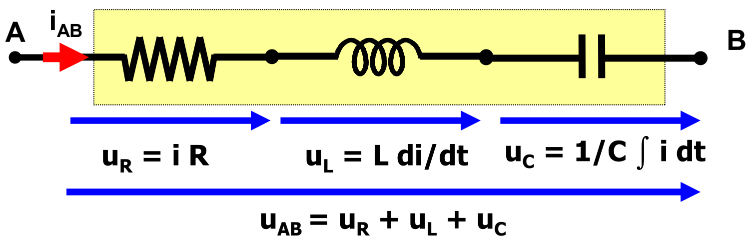
- Se puede generar con facilidad
- Su transformación en otras ondas de diferente amplitud se consigue con facilidad mediante la utilización de transformadores
- Las operaciones para su utilización resultan igualmente sencilla por tratarse de la función seno





4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

Excitación: $i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1)$ ⇨ **Respuesta:** $u(t) = ?$

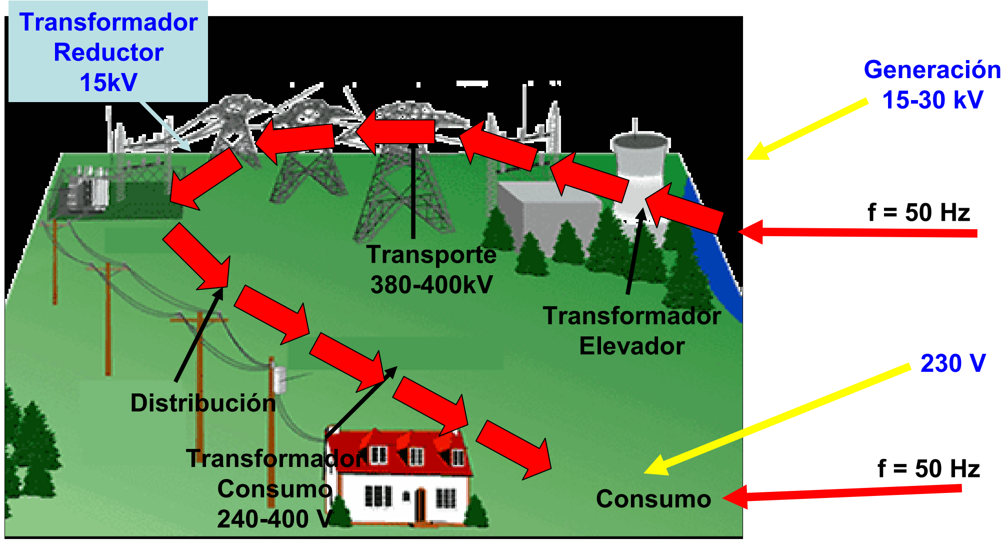


Excitación: $i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1)$ ⇨ **Respuesta:** $u(t) = U_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2)$

U_0?

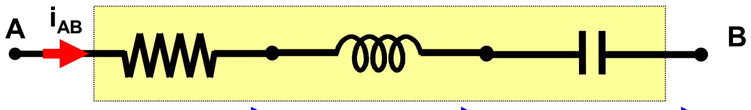
φ_2 ?

4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL



4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

Excitación: $i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1)$ ⇨ **Respuesta:** $u(t) = ?$



$u_R = i\,R$ $\quad u_L = L\,di/dt \quad u_C = 1/C \int i\,dt$

$u_{AB} = u_R + u_L + u_C$

Excitación: $i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1)$ ⇨ **Respuesta:** $u(t) = U_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2)$

$I_0 \underline{|\omega t + \varphi_1}$ ⇨ $U_0 \underline{|\omega t + \varphi_2}$

4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

Ventajas Matemáticas:

- Admite una representación exponencial lo que permite operar con vectores giratorios denominados fasores que admiten una representación en el plano complejo. Por ello la teoría de circuitos en C.A. senoidal utiliza como base los números complejos

$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \operatorname{sen}(\theta)$ ← Según Euler

$A\,e^{j\theta} = A\cos(\theta) + j\,A \operatorname{sen}(\theta)$

$A\,e^{j(\omega t+\varphi)} = A\cos(\omega t+\varphi) + j\,\boxed{A \operatorname{sen}(\omega t+\varphi)}$

4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

Ventajas Matemáticas:

Una onda periódica no senoidal, permite, mediante el desarrollo en serie de fourier, ser descompuesta en un número de funciones senoidales y cosenoidales de frecuencias múltiples de la fundamental (armónicos).

$u(t) = u(t + T)$ → Onda periodica →

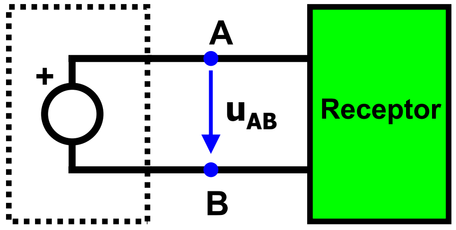
$$u(t) = U_{0CC} + U_{01S}\operatorname{sen}\omega t + U_{02S}\operatorname{sen}2\omega t + U_{03S}\operatorname{sen}3\omega t + \ldots +$$
$$+ U_{01C}\cos\omega t + \underbrace{U_{02C}\cos 2\omega t + U_{03C}\cos 3\omega t + \ldots}_{\text{componentes armónicos de orden superior}}$$

Valor medio.

componentes armónicas fundamentales.

componentes armónicos de orden superior

4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

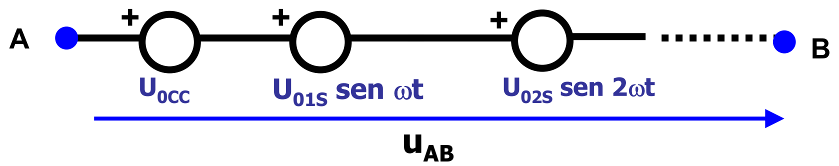


$u_{AB}(t) = u_{AB}(t + T)$ → → Onda periodica →

Excitación: u(t)

Respuesta: u(t) ó i(t)

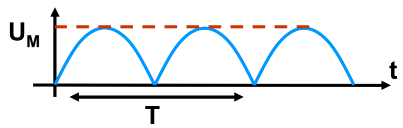
$$u(t) = U_{0CC} + U_{01S}\,\text{sen}\,\omega t + U_{02S}\,\text{sen}\,2\omega t + U_{03S}\,\text{sen}\,3\omega t + \ldots + U_{01C}\cos\omega t + U_{02C}\cos 2\omega t + U_{03C}\cos 3\omega t + \ldots$$



4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

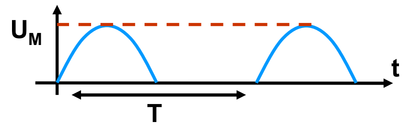
Algunos desarrollos interesantes son:

1.-Rectificación completa:



$$f(t) = \frac{4Um}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos 2\omega t - \frac{1}{15}\cos 4\omega t + \ldots\right)$$

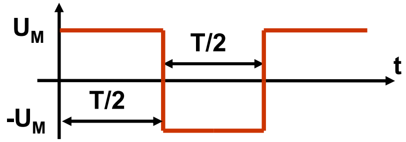
2.-Rectificación de media onda:



$$f(t) = \frac{Um}{\pi}\left(1 + \frac{\pi}{2}\text{sen}\,\omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t + \ldots\right)$$

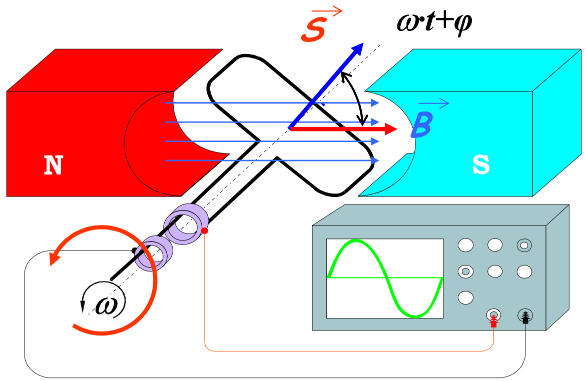
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

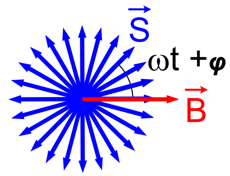
3.-Onda cuadrada:



$$f(t) = \frac{4Um}{\pi}\text{sen}\,\omega t + \frac{4Um}{3\pi}\text{sen}\,3\omega t + \frac{4Um}{5\pi}\text{sen}\,5\omega t + \ldots$$

4.3.1.- Generador de corriente alterna





Velocidad de giro:ω

pulsación

4.3.1.- Generador de corriente alterna

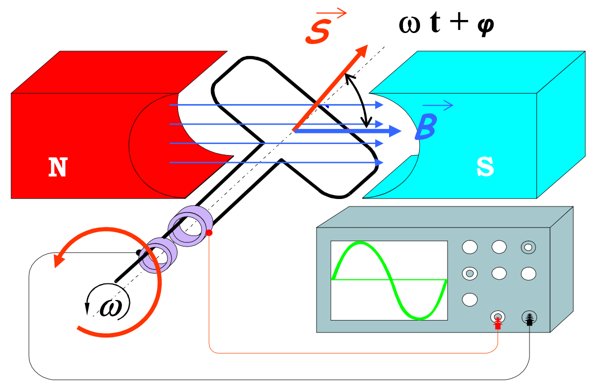
Ley de Faraday

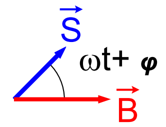
ENUNCIADO: Si el flujo del campo magnético a través de un circuito varía con el tiempo, en dicho circuito aparece una fuerza electromotriz inducida que es igual a la derivada del flujo magnético a través del circuito con respecto al tiempo con signo menos.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Esta fem en el circuito da lugar a una intensidad inducida **i=ε/R**

4.3.1.- Generador de corriente alterna





Velocidad de giro:ω

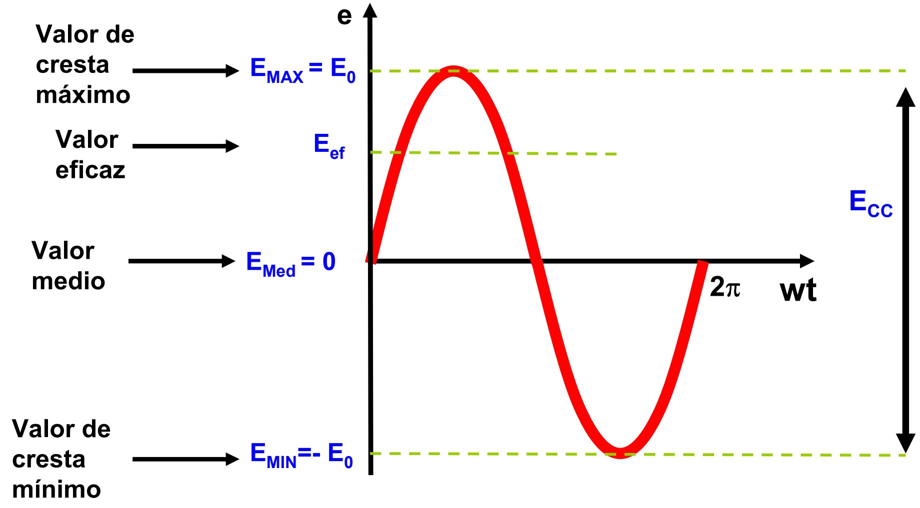
pulsación

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\vec{B}\cdot\vec{S})}{dt} = -\frac{d(N\,B\,S\cos(\omega t+\varphi))}{dt} =$$

$$= -BNS\frac{d}{dt}(\cos(\omega t+\varphi)) = \boxed{(BNS\omega)\,sen(\omega t+\varphi)}$$

4.3.2.- Valores asociados a las ondas senoidales

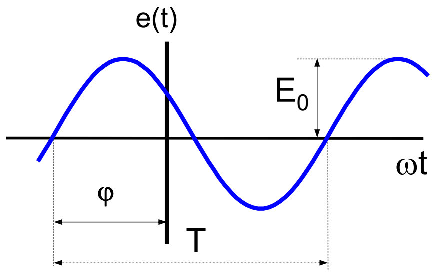
$$e(t) = E_0\ sen(\omega t)$$



4.3.2.- Valores asociados a las ondas senoidales

$$e(t) = E_0\ sen(\omega t + \varphi)$$

- **Periodo $T = 2\pi/\omega$ (s)**
- **Frecuencia $f = 1/T$ (Hz)**
- **Pulsación $\omega = 2\pi f$ (rad/s)**
- **Fase $(\omega t + \varphi)$**
- **Fase inicial φ (grados)**



4.3.2.- Valores asociados a las ondas senoidales

$$e(t) = E_0\ sen(\omega t)$$

Valor medio: $$E_m = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)dt$$

$$E_m = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} E_0\ sen\ \omega t\ dt = \frac{2E_0}{T}\left[\frac{-\cos\omega t}{\omega}\right]_0^{T/2} =$$

$$= \frac{2E_0}{T}\left(\frac{-\cos\pi}{\omega} + \frac{\cos 0}{\omega}\right) = \frac{2E_0}{T}\,\frac{2}{\omega} = \frac{2E_0}{\pi}$$

$T\,\omega = 2\pi$

4.3.2.- Valores asociados a las ondas senoidales

$$e(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Valor eficaz: $E_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\,dt}$

$$E_{ef}^2\, T = \int_0^T e^2(t)dt =$$

$$= E_0^2 \int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega t)\,dt = \frac{E_0^2}{2} T$$

$$\boxed{E_{ef} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}}$$

4.3.2.- Valores asociados a las ondas senoidales

$$e(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Se utiliza el valor eficaz de la onda senoidal como referencia de esta

Aparatos de medida → valores eficaces

Receptores → valores eficaces

U = 220 V

f = 50 Hz

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = \sqrt{2}\, 220 \operatorname{sen}(100\pi t) \\ U_0 = 311{,}2 \text{ V} \\ U_{CC} = 622{,}4 \text{ V} \end{array}\right.$$

4.3.2.- Valores asociados a las ondas senoidales

$$e(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Factor de Cresta $\quad F_c = \frac{E_{Max}}{E_{ef}} = \frac{E_0}{E_0/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Factor de Forma $\quad F_f = \frac{E_{ef}}{E_{med}} = \frac{E_0/\sqrt{2}}{2E_0/\pi} = 1{,}11$

REPRESENTACION CARTESIANA Y SIMBOLOGICA O POLAR

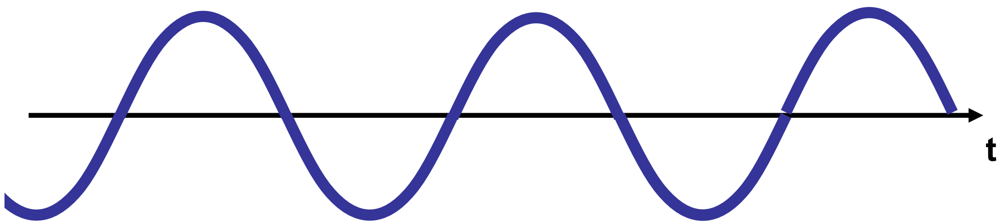
$$e(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t \pm \varphi_0)$$

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t \pm \varphi_0)$$

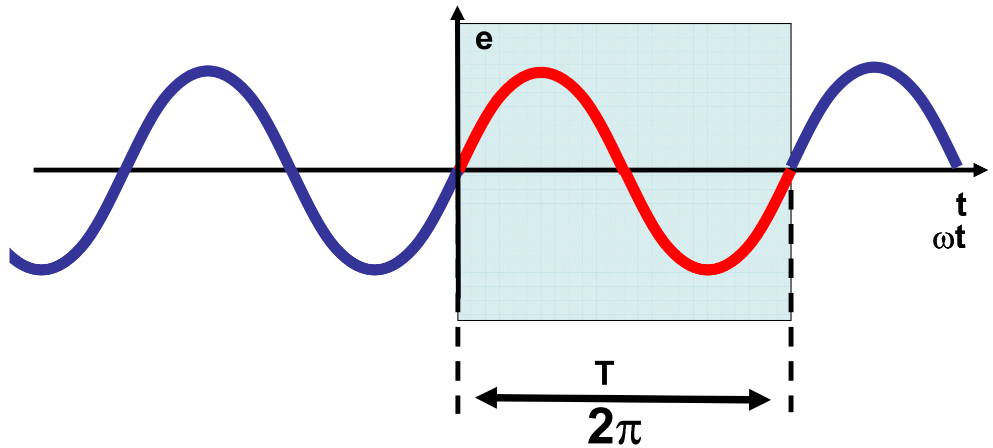
REPRESENTACION CARTESIANA DE LA ONDA SENO

$$e(t) = E_0 \, \mathrm{sen}(\omega t \pm \varphi_0)$$

ONDA ALTERNA SENOIDAL



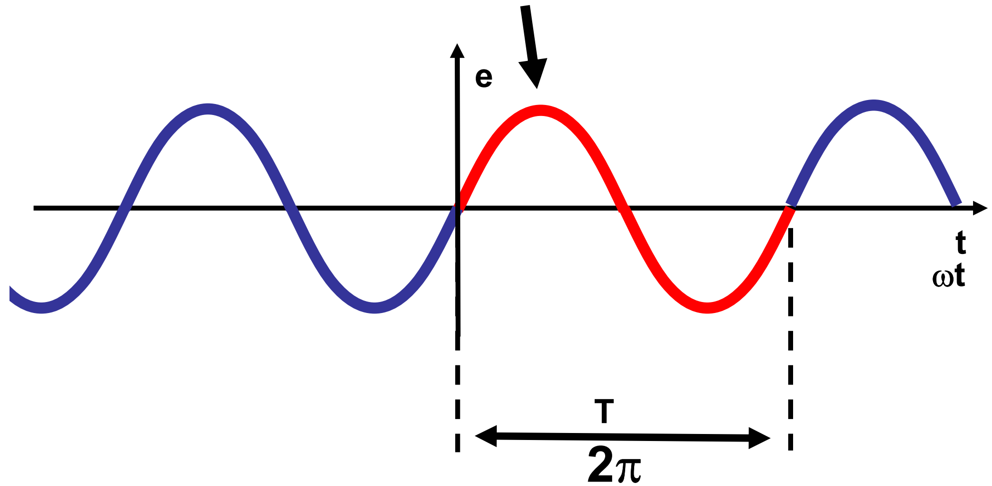
ONDA ALTERNA SENOIDAL



Ciclo : Onda seno

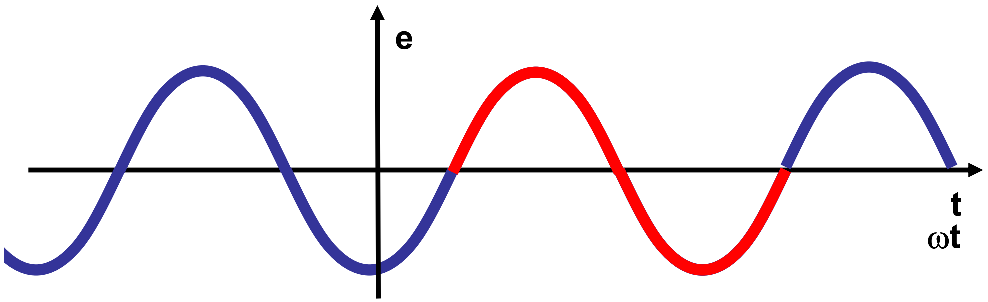
ONDA ALTERNA SENOIDAL

$$e(t) = E_0 \, \mathrm{sen}(\omega t)$$



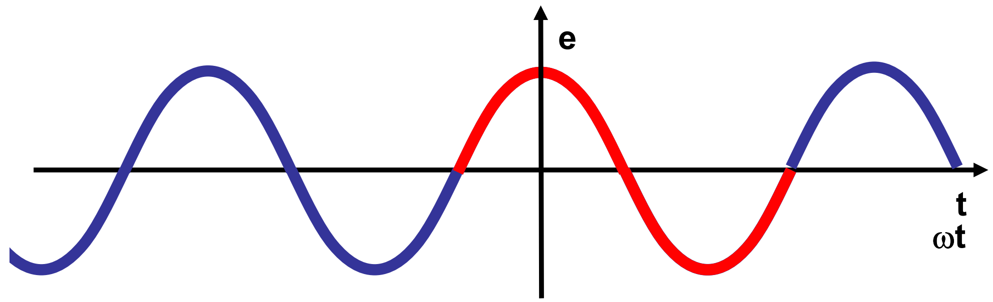
Ciclo : Onda seno

ONDA ALTERNA SENOIDAL



Ciclo Seno en ATRASO (-)

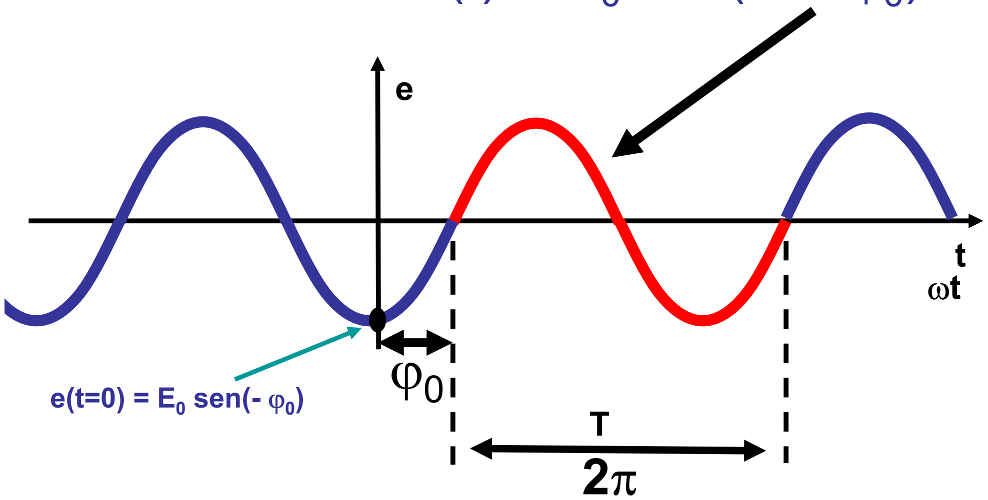
ONDA ALTERNA SENOIDAL



Ciclo Seno en ADELANTO (+)

ONDA ALTERNA SENOIDAL

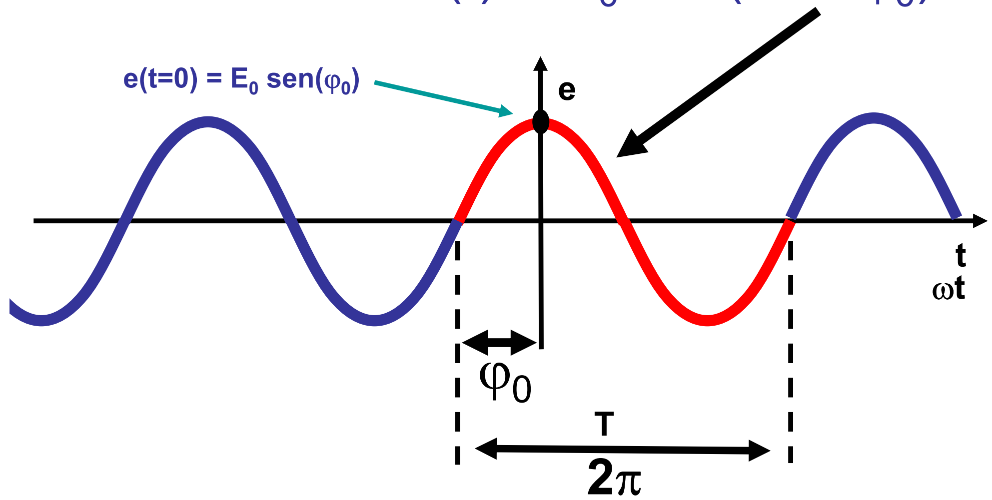
$e(t) = E_0\ \mathrm{sen}(\omega t - \varphi_0)$



Ciclo Seno en ATRASO (-)

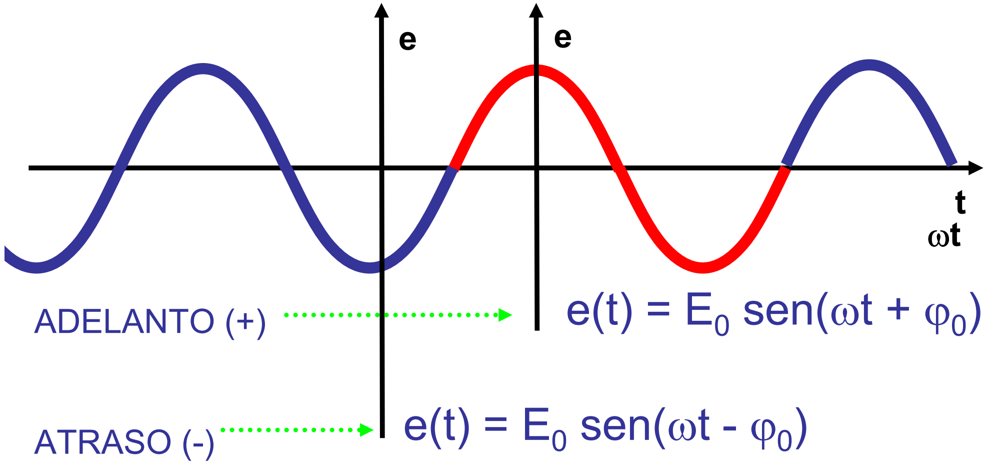
ONDA ALTERNA SENOIDAL

$e(t) = E_0\ \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$



Ciclo Seno en ADELANTO (+)

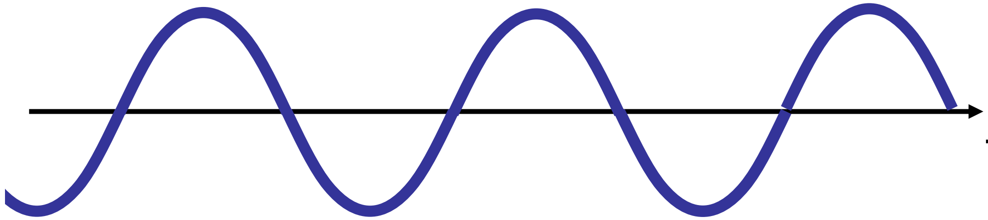
ONDA ALTERNA SENOIDAL



$e(t) = E_0\ sen(\omega t + \varphi_0)$

$e(t) = E_0\ sen(\omega t - \varphi_0)$

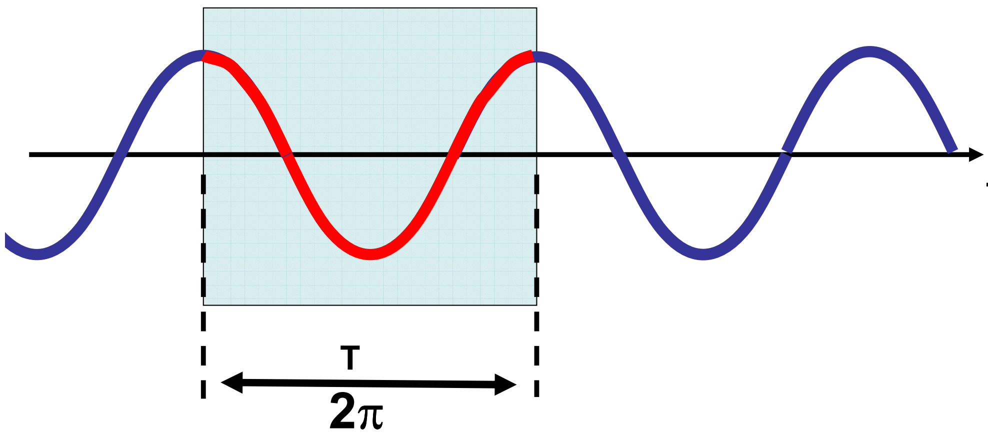
ONDA ALTERNA COSENOIDAL



REPRESENTACION CARTESIANA DE LA ONDA COSENO

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t \pm \varphi_0)$$

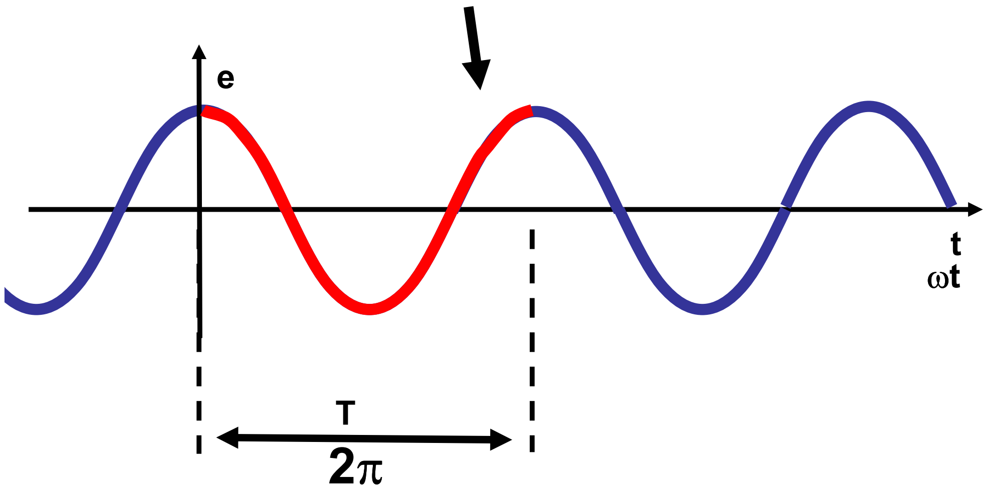
ONDA ALTERNA COSENOIDAL



Ciclo: Onda Coseno

ONDA ALTERNA COSENOIDAL

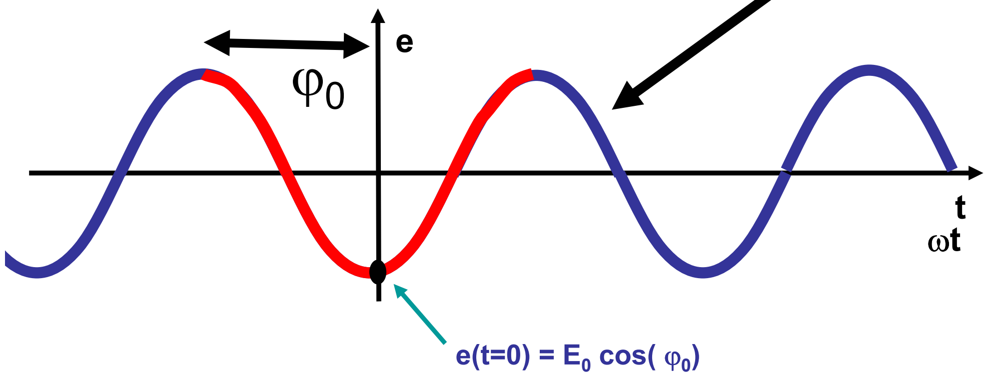
$e(t) = E_0 \, Cos(\omega t)$



Ciclo: Onda Coseno

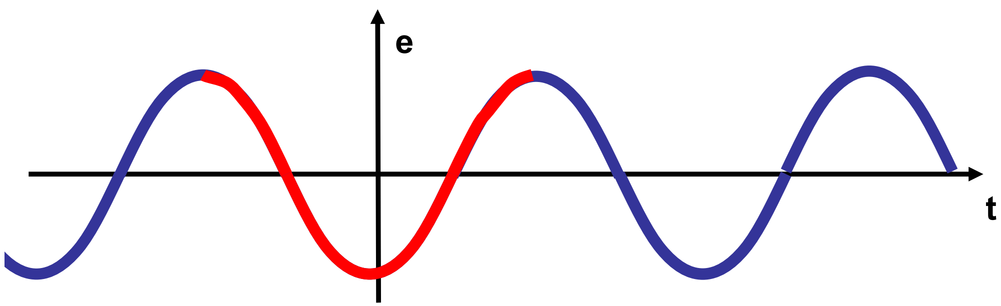
ONDA ALTERNA COSENOIDAL

$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$



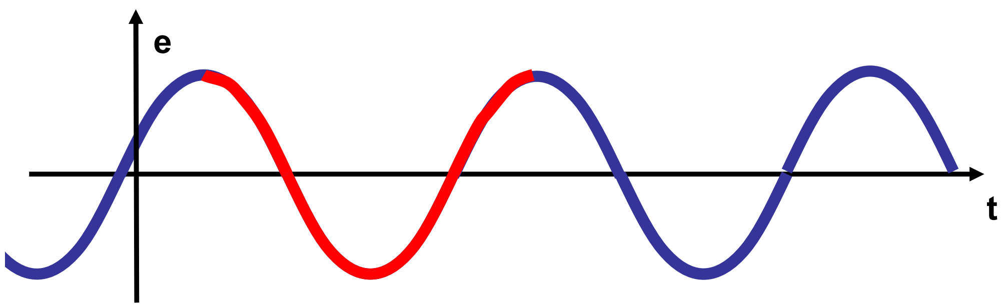
Ciclo coseno en ADELANTO (+)

ONDA ALTERNA COSENOIDAL



Ciclo coseno en ADELANTO (+)

ONDA ALTERNA COSENOIDAL

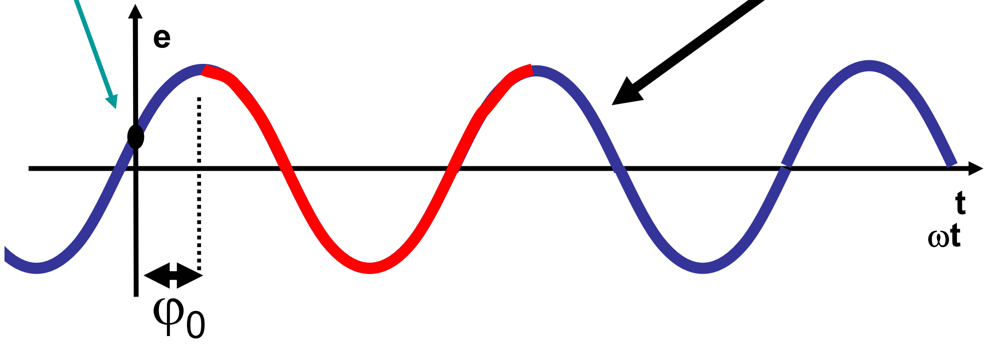


Ciclo coseno en ATRASO (-)

ONDA ALTERNA COSENOIDAL

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t - \varphi_0)$$

$e(t=0) = E_0 \cos(-\varphi_0)$

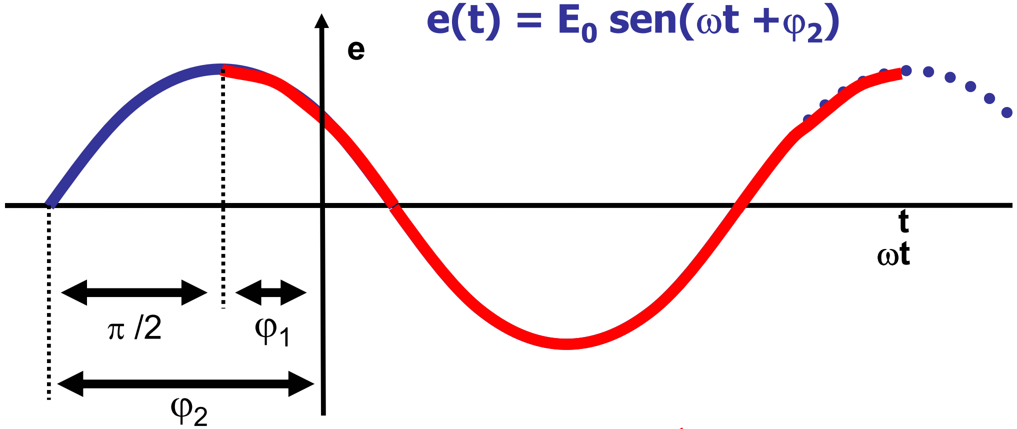


Ciclo coseno en ATRASO (-)

ONDA ALTERNA

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$e(t) = E_0 \,\text{sen}(\omega t + \varphi_2)$$

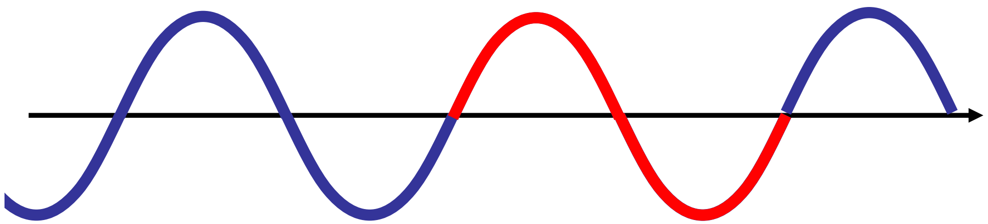


$e(t) = E_0 \,\text{sen}(\omega t + \varphi_2) = E_0 \,\text{sen}(\omega t + \pi/2 + \varphi_1) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$

$\text{sen}(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$

ONDA ALTERNA

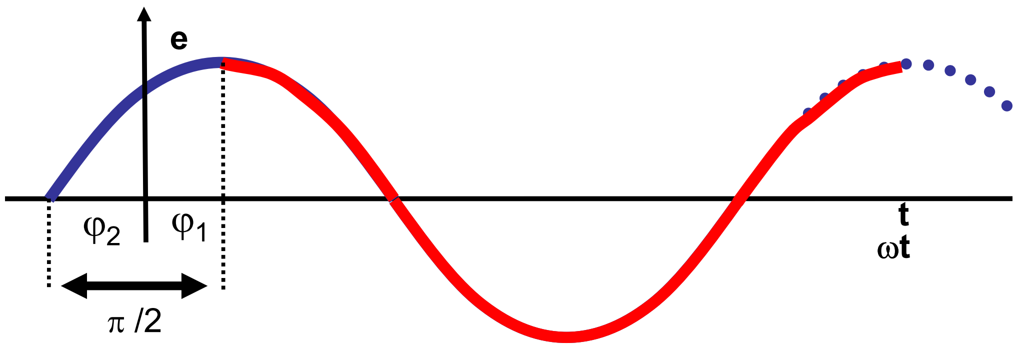
Para representar a esta onda se escoge el ciclo seno



ONDA ALTERNA

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t - \varphi_1)$$

$$e(t) = E_0 \,\text{sen}(\omega t + \varphi_2)$$



$e(t) = E_0 \,\text{sen}(\omega t + \varphi_2) = E_0 \,\text{sen}(\omega t + \pi/2 - \varphi_1) = E_0 \cos(\omega t - \varphi_1)$

$\text{sen}(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$

EXPRESIÓN DE FOURIER

Las anteriores expresiones de la función senoidal se puede describir mediante combinación lineal de las funciones seno y coseno:

$$e(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = a \cos(\omega t) + b \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) = a \cos(\omega t) + b \operatorname{sen}(\omega t)$$

Las constantes **a** y **b** se denominan Coeficientes de Fourier y se definen por: **a=e(0)** y **b=e(T/4)** que para la función seno valen:

$$a = e(0) = E_0 \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$b = e(T/4) = E_0 \operatorname{sen}(\pi/2 + \varphi) = E_0 \cos(\varphi)$$

siendo T el período de la función senoidal.

Los Coeficientes de Fourier tienen las mismas unidades que la onda (Voltios o amperes) y cualquiera de ellos, o ambos, pueden ser negativos.

EXPRESIÓN DE FOURIER

$$e(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = a \cos(\omega t) + b \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$a = E_0 \operatorname{sen}(\varphi) \qquad b = E_0 \cos(\varphi)$$

Operando con a y b:

$$a^2 + b^2 = E^2_0 \operatorname{sen}^2(\varphi) + E^2_0 \cos^2(\varphi) = E^2_0$$

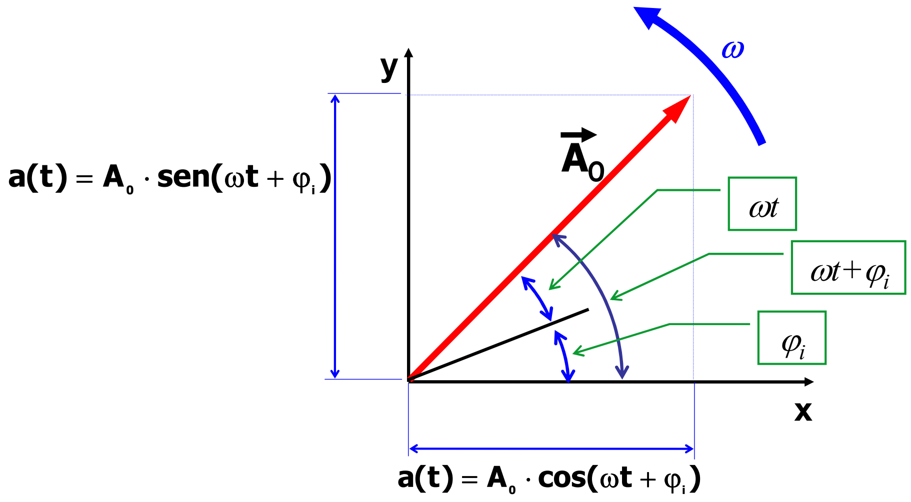
$$E_0 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a/b = \operatorname{Tg}(\varphi)$$

$$e(t) = a \cos(\omega t) + b \operatorname{sen}(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}\left(\omega t + \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}\right)$$

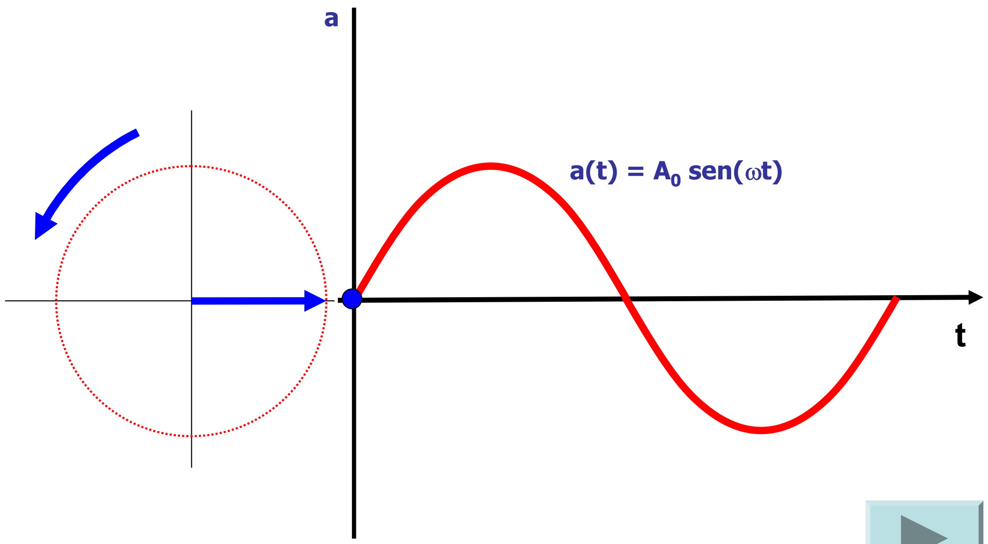
Con las expresiones anteriores podemos pasar de un tipo de expresión a otro tipo.

Representación simbólica senoidal

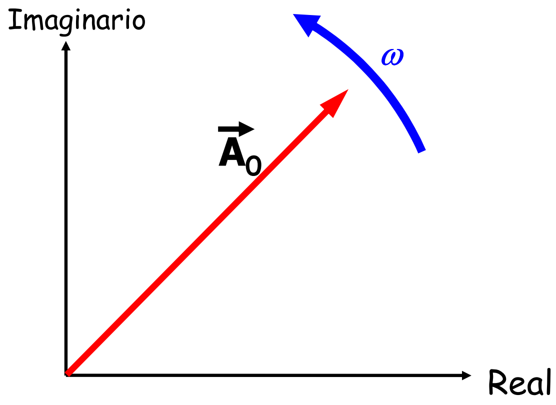
$$a(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_i)$$



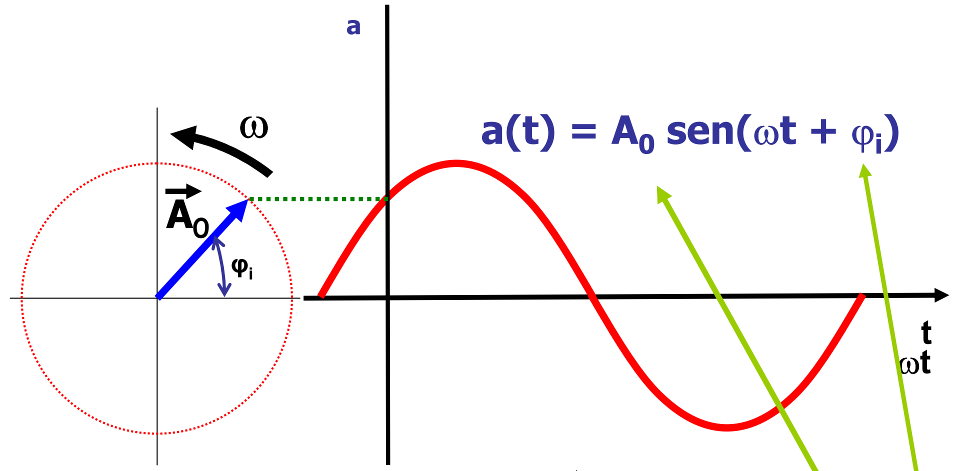
Representación simbólica senoidal



Representación simbólica senoidal



Definición de fasor

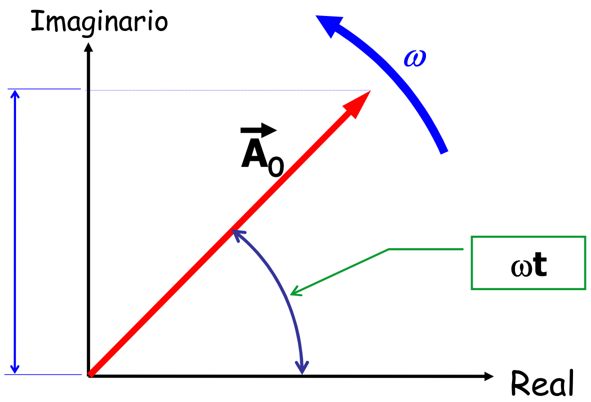


Versor $\quad \bar{A}_0 = A_0 e^{j(\omega t + \varphi_i)} = A_0 \underline{|\omega t + \varphi_i}$

Fasor $\quad \bar{A}_0 = A_0 e^{j(\varphi_i)} = A_0 \underline{|\varphi_i} \Rightarrow \bar{A} = A \underline{|\varphi_i}$

Representación simbólica senoidal

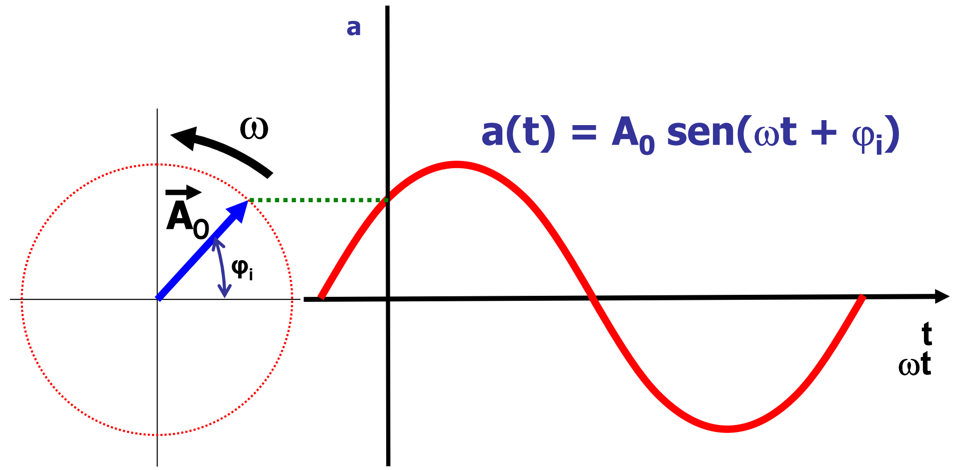
$a(t) = A_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$



Versor: vector giratorio en el plano complejo

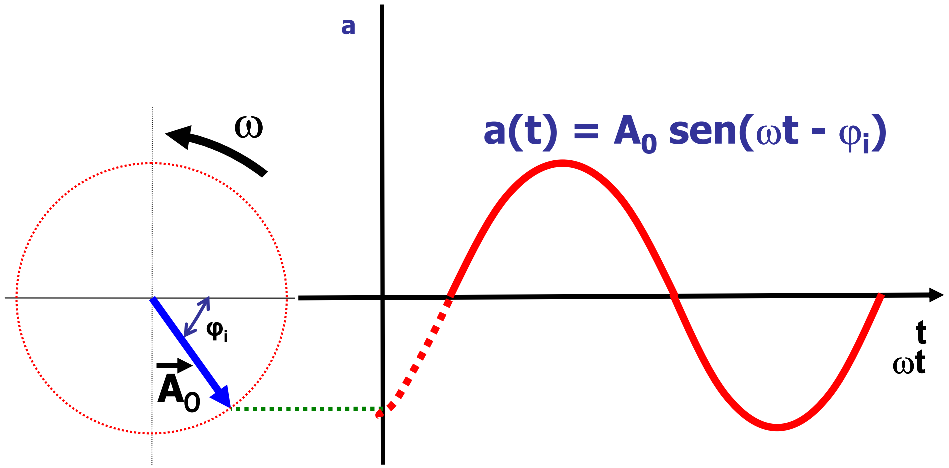
$$\bar{A}_0 = \underbrace{A_0 e^{j(\omega t)}}_{\text{Exponencial}} = \underbrace{A_0 \underline{|\omega t}}_{\text{Polar}} = \underbrace{A_0 \cos(\omega t) + j\, A_0 \operatorname{sen}(\omega t)}_{\text{Cartesiana}}$$

Cada fasor representa una onda senoidal distinta



$\bar{A}_0 = A_0 \underline{|\varphi_i} \qquad a(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_i)$ **adelanto**

Cada fasor representa una onda senoidal distinta



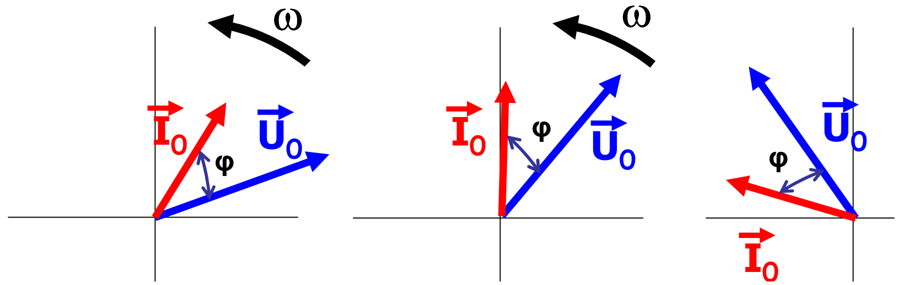
$\overline{A}_0 = A_0 \angle -\varphi_i$ $\quad a(t) = A_0 \text{ sen}(\omega t - \varphi_i)$ **atraso**

REPRESENTACIÓN FASORIAL DE LAS MAGNITUDES ELÉCTRICAS SENOIDALES DE IGUAL FRECUENCIA Y DIFERENTE FASE

$\overline{U}_0 = U_0 \angle \varphi_1$

$\overline{I}_0 = I_0 \angle \varphi_2$

$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$
Desfase



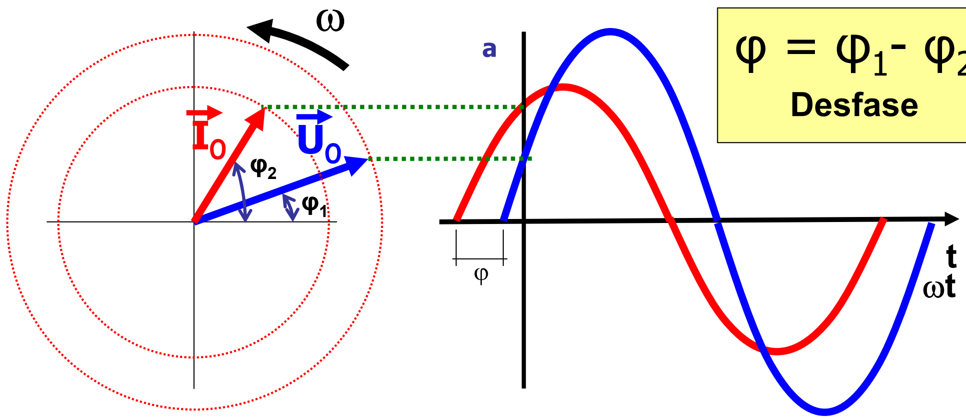
U esta retrasada respecto a I un ángulo φ

I esta adelantada respecto a U un ángulo φ

REPRESENTACIÓN FASORIAL DE LAS MAGNITUDES ELÉCTRICAS SENOIDALES DE IGUAL FRECUENCIA Y DIFERENTE FASE

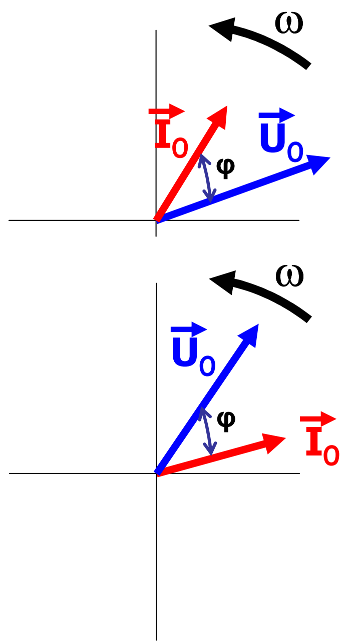
$u(t) = U_0 \text{ sen}(\omega t + \varphi_1)$ $\quad \overline{U}_0 = U_0 \angle \varphi_1 \Rightarrow \overline{U} = U \angle \varphi_1$

$i(t) = I_0 \text{ sen}(\omega t + \varphi_2)$ $\quad \overline{I}_0 = I_0 \angle \varphi_2 \Rightarrow \overline{I} = I \angle \varphi_2$



$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$
Desfase

En electrotecnia, la intensidad se refiere a la tensión



I esta adelantada respecto a U un ángulo φ (desfase -)

I esta atrasada respecto a U un ángulo φ (desfase +)

$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$
Desfase

En electrotecnia, la intensidad se refiere a la tensión

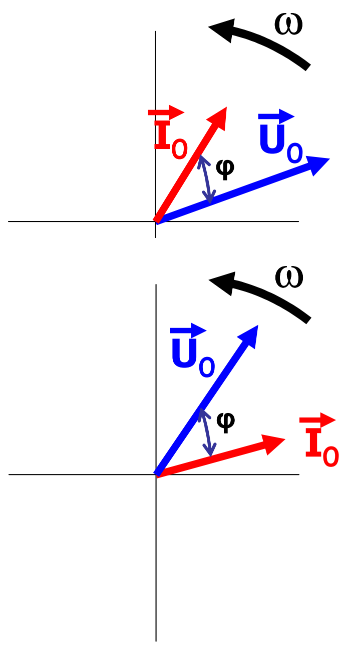


Diagrama fasorial: representación de los fasores en el plano de los números complejos

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Desfase

SUMA DE DOS ONDAS SENOIDALES DE IGUAL FRECUENCIA Y DIFERENTE FASE

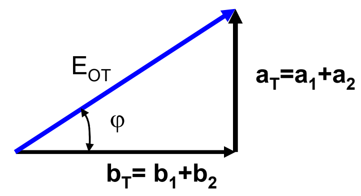
$$e_1(t) = E_{01}\,\text{sen}(\omega t + \varphi_1) \Longrightarrow \bar{E}_1 = E_{01}\underline{|\varphi_1} = E_{01}\cos\varphi_1 + j\,E_{01}\,\text{sen}\,\varphi_1 = b_1 + j\,a_1$$

+

$$e_2(t) = E_{02}\,\text{sen}(\omega t + \varphi_2) \Longrightarrow \bar{E}_2 = E_{02}\underline{|\varphi_2} = E_{02}\cos\varphi_2 + j\,E_{02}\,\text{sen}\,\varphi_2 = b_2 + j\,a_2$$

$$e_T(t) = E_{0T}\,\text{sen}(\omega t + \varphi_T) \qquad (b_1 + b_2) + j\,(a_1 + a_2) = b_T + j\,a_T$$

$$\begin{cases} \varphi_T = \text{arc tg}\,\dfrac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \\ E_{0T} = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \end{cases}$$



$$\varphi_T = \text{arc tg}\,\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$$

$$E_{0T} = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

$$\bar{E}_T = E_{0T}\underline{|\varphi_T}$$

SUMA DE DOS ONDAS SENOIDALES DE IGUAL FRECUENCIA Y DIFERENTE FASE

$$e_1(t) = E_{01}\,\text{sen}(\omega t + \varphi_1) \quad = a_1\cos(\omega t) + b_1\,\text{sen}(\omega t)$$

+

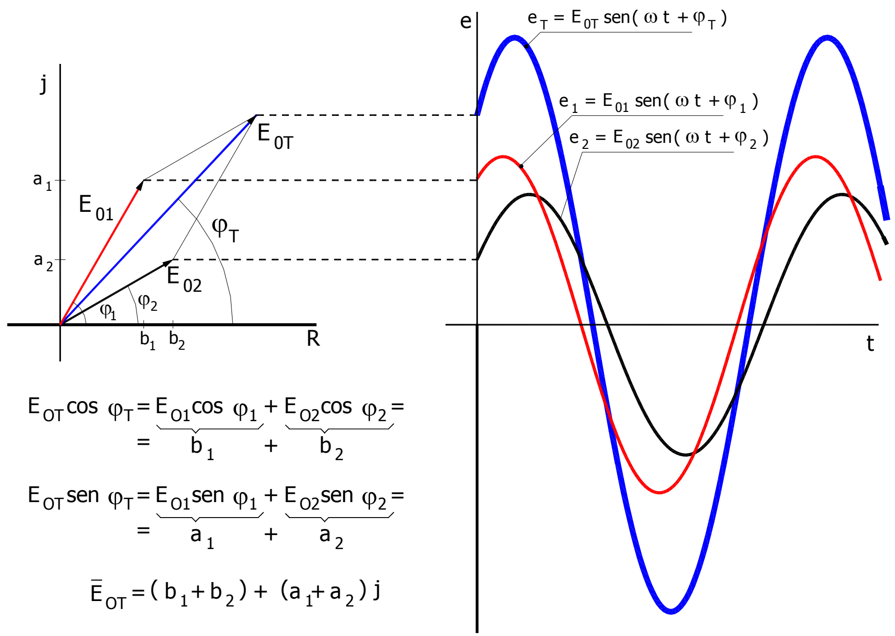
$$e_2(t) = E_{02}\,\text{sen}(\omega t + \varphi_2) \quad = a_2\cos(\omega t) + b_2\,\text{sen}(\omega t)$$

$$e_T(t) = E_{0T}\,\text{sen}(\omega t + \varphi_T) \quad = (a_1 + a_2)\cos(\omega t) + (b_1 + b_2)\,\text{sen}(\omega t)$$

$$= a_T\cos(\omega t) + b_T\,\text{sen}(\omega t) =$$

$$= \boxed{\sqrt{a_T^2 + b_T^2}}\;\text{sen}\,(\omega t + \boxed{\text{arc tg}\,\frac{a_T}{b_T}})$$

SUMA DE DOS ONDAS SENOIDALES DE IGUAL FRECUENCIA Y DIFERENTE FASE



$$E_{0T}\cos\varphi_T = \underbrace{E_{01}\cos\varphi_1}_{b_1} + \underbrace{E_{02}\cos\varphi_2}_{b_2} =$$

$$E_{0T}\,\text{sen}\,\varphi_T = \underbrace{E_{01}\,\text{sen}\,\varphi_1}_{a_1} + \underbrace{E_{02}\,\text{sen}\,\varphi_2}_{a_2} =$$

$$\bar{E}_{0T} = (b_1 + b_2) + (a_1 + a_2)\,j$$

SUMA DE DOS ONDAS SENOIDALES DE IGUAL FRECUENCIA Y DIFERENTE FASE

$e_1(t) = E_{01}\ \text{sen}(\omega t + \varphi_1)$

$e_2(t) = E_{02}\ \text{sen}(\omega t + \varphi_2)$

$\bar{E}_1 = E_{01} \underline{|\ \varphi_1} = b_1 + j\,a_1$

$\bar{E}_2 = E_{02} \underline{|\ \varphi_2} = b_2 + j\,a_2$

Representación simbólica

Por Fourier

Suma Números complejos

Representación simbólica

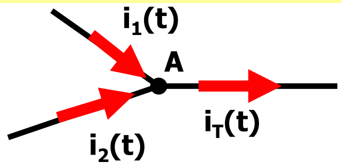
$e_T(t) = E_{0T}\ \text{sen}(\omega t + \varphi_T)$

$\bar{E}_T = E_{0T} \underline{|\ \varphi_T} = b_T + j\,a_T$

EJERCICIO: En un nudo de un circuito eléctrico concurren tres ramas, siendo el valor de las intensidades que circulan por ellas i_1, i_2, i_T conociéndose dos de ellas. Calcular la tercera.

$i_1(t) = 240\ \text{sen}(314\,t + 20º)$

$i_2(t) = 210\ \text{sen}(314\,t + 80º)$



***Solución*:**

a) Por la representación simbólica:

$i_1(t) \rightarrow \bar{I}_1 = 240 \underline{|\ 20} = 225{,}5 + 82{,}08j$

$i_2(t) \rightarrow \bar{I}_2 = 210 \underline{|\ 80} = 36{,}46 + 206{,}8j$

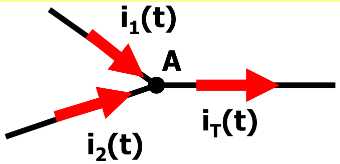
$\bar{I}_T = 390 \underline{|\ 47{,}79} = 261{,}9 + 288{,}9j$

$i_T\ (t) = 390\ \text{sen}\ (314\ t + 47{,}79)$

EJERCICIO: En un nudo de un circuito eléctrico concurren tres ramas, siendo el valor de las intensidades que circulan por ellas i_1, i_2, i_T conociéndose dos de ellas. Calcular la tercera.

$i_1(t) = 240\ \text{sen}(314\,t + 20º)$

$i_2(t) = 210\ \text{sen}(314\,t + 80º)$



***Solución*:**

a) Por Fourier:

$i_1 = a_1 \cos(314\,t) + b_1 \text{sen}(314\,t) = 82{,}08 \cos(314\,t) + 225\ \text{sen}(314\,t)$

$i_2 = a_2 \cos(314\,t) + b_2\ \text{sen}(314\,t) = 206{,}8 \cos(314\,t) + 36{,}466\ \text{sen}(314\,t)$

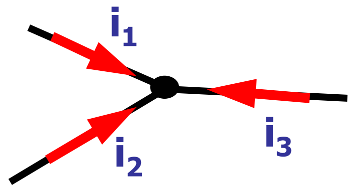
$i_T = i_1 + i_2 = 288{,}9 \cos(314\,t) + 261{,}97\ \text{sen}(314\,t) =$

$$= \sqrt{288{,}9^2 + 261{,}97^2}\ \text{sen}\,(314t + \text{arc tg}\,\frac{288{,}9}{261{,}97})$$

$i_T = 390\ \text{sen}\ (314\ t + 47{,}79)$

Condiciones impuestas a las conexiones. (Leyes de Kirchhoff)

1ª Ley de Kirchhoff



$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$\underbrace{I_{01}\text{sen}\ (\omega t+\varphi_1)} + \underbrace{I_{02}\text{sen}\ (\omega t+\varphi_2)} + \underbrace{I_{03}\text{sen}\ (\omega t+\varphi_3)} = 0$$

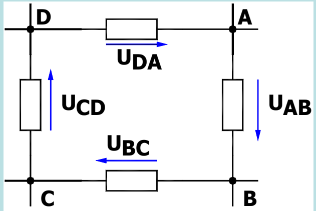
$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

EJERCICIO: Determinar la diferencia de potencial entre A y B conociendo las tensiones u_{BC}, u_{CD} y u_{DA}.

$u_{BC}(t) = 240\ \text{sen}(314\,t + 20^{o})$

$u_{CD}(t) = 210\ \text{sen}(314\,t + 80^{o})$

$u_{DA}(t) = 390\ \text{sen}(314\,t + 48^{o})$



Solución: $u_{AB} + u_{BC} + u_{CD} + u_{DA} = 0 \Rightarrow u_{BC} + u_{CD} + u_{DA} = -\,u_{AB}$

$\bar{U}_{BC} = 240\angle 20 = 225{,}5 + 82{,}08j$

$\bar{U}_{CD} = 210\angle 80 = 36{,}46 + 206{,}8j$

$\bar{U}_{DA} = 390\angle 48 = 261{,}9 + 288{,}9j$

$-\bar{U}_{AB} = 780\angle 48 = 523{,}8 + 577{,}8j$

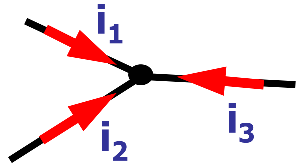
$\bar{U}_{AB} = 780\angle 228 = -523{,}8 - 577{,}8j$

$u_{AB}(t) = 780\ \text{sen}\,(314\,t + 228)$

Condiciones impuestas a las conexiones. (Leyes de Kirchhoff)

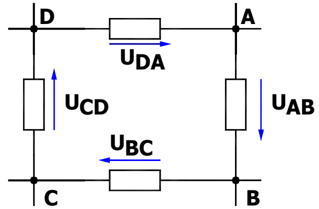
1ª Ley de Kirchhoff

$i_1 + i_2 + i_3 = 0$



2ª Ley de Kirchhoff

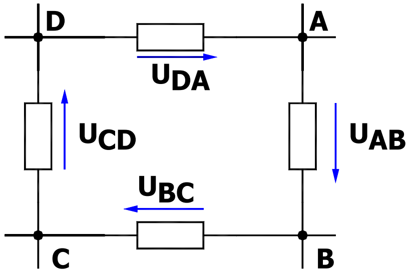
$u_{AB} + u_{BC} + u_{CD} + u_{DA} = 0$



Las leyes de Kirchoff son aplicables a las ondas y también a los fasores

Condiciones impuestas a las conexiones. (Leyes de Kirchhoff)

2ª Ley de Kirchhoff



$$\underbrace{u_{AB}}_{U_{AB}\text{sen}\,(\omega t+\varphi_{AB})} + \underbrace{u_{BC}}_{U_{BC}\text{sen}\,(\omega t+\varphi_{BC})} + \underbrace{u_{CD}}_{U_{CD}\text{sen}\,(\omega t+\varphi_{CD})} + \underbrace{u_{DA}}_{U_{DA}\text{sen}\,(\omega t+\varphi_{DA})} = 0$$

$$\bar{U}_{AB} + \bar{U}_{BC} + \bar{U}_{CD} + \bar{U}_{DA} = 0$$

FIN

TEMA 4