TEMA 7.

POTENCIA EN CIRCUITOS MONOFÁSICOS

7.1.- Potencia instantánea, media y fluctuante de un dipolo pasivo.

7.1.1.- Elemento Resistencia.
7.1.2.- Elemento Inductancia.
7.1.3.- Elemento Condensador.

7.2.- Potencia Activa, Reactiva y Aparente. Triángulo de Potencias.

7.3.- Potencia Compleja.

7.4.- Teorema de Boucherot.

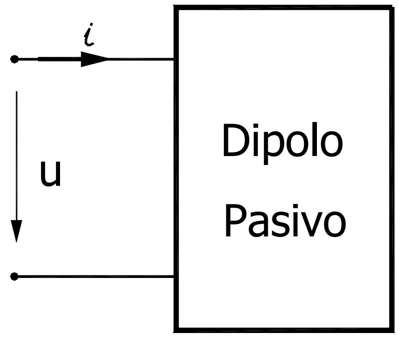
7.5.- Corrección del factor de potencia.

7.6.- Medida de la potencia en corriente alterna.

TEMA 7. POTENCIA EN CIRCUITOS MONOFÁSICOS

7.1.- POTENCIA INSTANTÁNEA, MEDIA Y FLUCTUANTE DE UN DIPOLO PASIVO

Si a un dipolo pasivo se le aplica una tensión alterna senoidal, **u**, el dipolo responde con una intensidad **i** de igual pulsación que la tensión aplicada pero desfasada un ángulo φ respecto a esta.



excitación: $u(t) = \sqrt{2}U \text{ sen } \omega t$ (tensión en el origen de fases)

respuesta: $i(t) = \sqrt{2}I \text{ sen } (\omega t - \varphi)$

Con el nombre de potencia instantánea se designa al producto **p = u(t) i(t) = u i** y será:

$$p(t) = u(t)\, i(t) = 2UI \text{ sen } (\omega t) \text{ sen } (\omega t - \varphi) \qquad (1)$$

Cuando p es mayor que cero la potencia es **absorbida** por el dipolo pasivo y si es menor que cero el dipolo **suministra** potencia.

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - sen\ a\ sen\ b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + sen\ a\ sen\ b \end{array}\right\} sen\ a\ sen\ b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

La potencia instantánea dada por (1) quedará:

$$p(t) = 2UI\frac{1}{2}\left[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)\right] = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi)$$

El valor medio de la potencia será:

$$P = P_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi)\right] dt = UI\cos\varphi$$

$$\mathbf{P = P_{med} = U\ I\ cos\ \varphi}$$

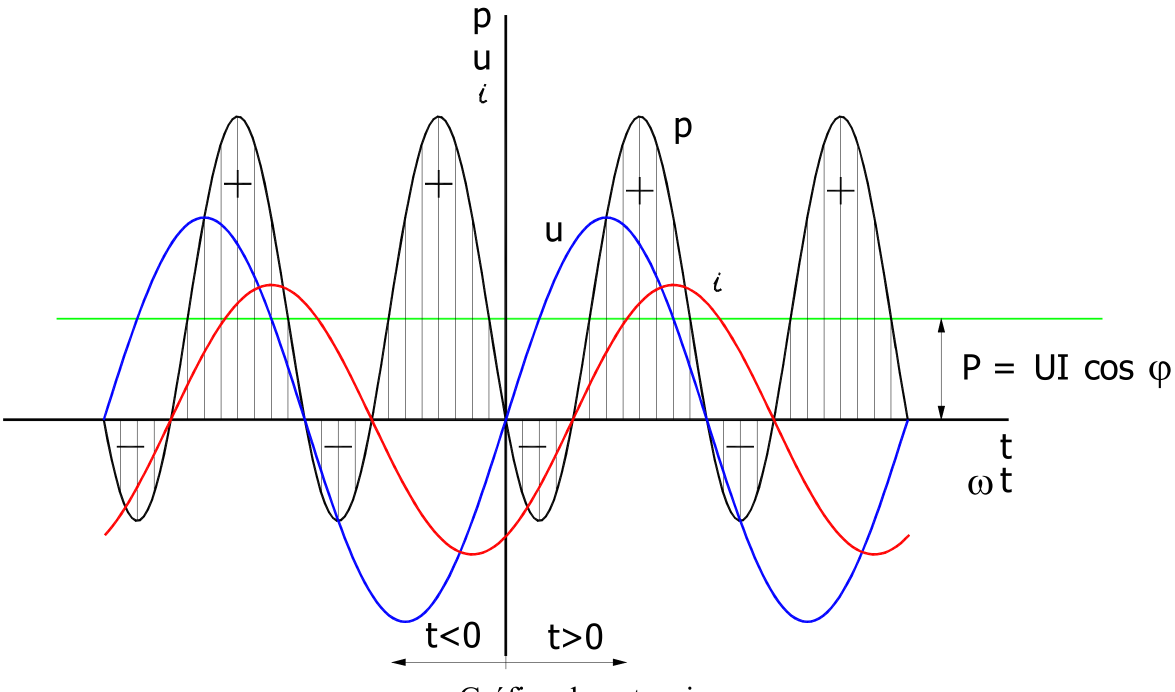
a este valor se le define como **potencia activa, real o verdadera** y es la potencia media transmitida al dipolo.

Por lo que, podremos decir que la potencia instantánea absorbida o cedida por un circuito pasivo esta compuesta por dos términos:

1) Un término constante P, denominado potencia activa

$P = UI \cos \varphi$

2) Un término fluctuante $-UI \cos (2\omega t - \varphi)$
($(+\varphi)$ circuito inductivo , $(-\varphi)$ circuito capacitivo) cuyo valor medio es nulo y cuya frecuencia es doble que las magnitudes *u* e *i*. Puede comprobarse en la gráfica de potencia como la potencia instantánea tiene doble pulsación que la tensión aplicada al dipolo y como el dipolo es alternativamente receptor (P>0) y generador (P<0).



Gráfica de potencia.

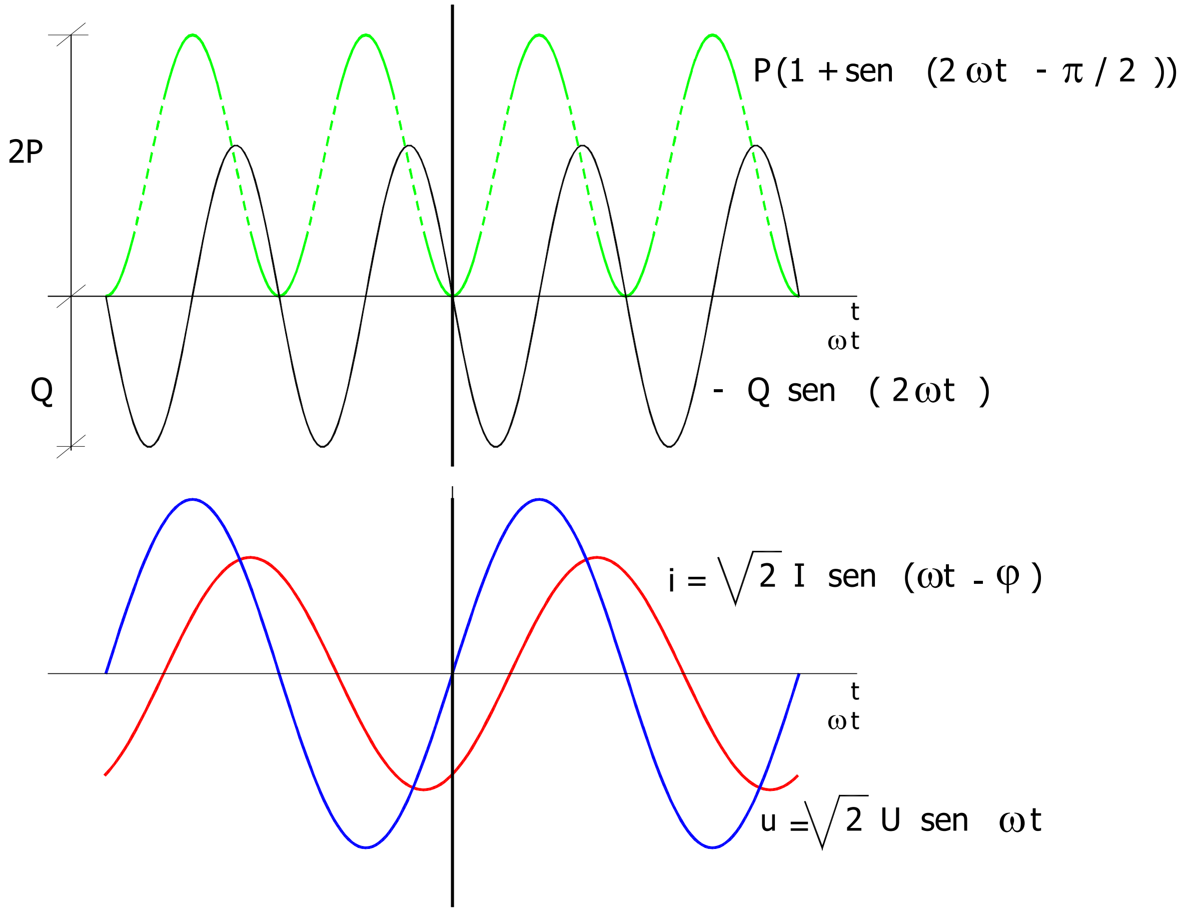
La expresión de la potencia instantánea se puede expresar de la siguiente manera:

$$p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos 2\omega t\cos\varphi - UI\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,2\omega t =$$

$$= UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t) - UI\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,2\omega t =$$

$$= P\,(1 + \mathrm{sen}\,(2\omega t - \pi/2)) - Q\,\mathrm{sen}\,(2\omega t) \qquad (*)$$

siendo $Q = UI\,\mathrm{sen}\,\varphi$ (constante igual que P).



Representación gráfica de (*)

Si la carga es capacitiva el ángulo de desfase es -φ y la potencia instantánea valdrá:

$$p(t) = UI\cos(-\varphi)(1-\cos 2\omega t) - UI\,\mathrm{sen}\,(-\varphi)\,\mathrm{sen}\,2\omega t =$$

$$= UI\cos\varphi(1-\cos 2\omega t) + UI\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,2\omega t =$$

$$= P(1 + \mathrm{sen}\,(2\omega t - \pi/2)) + Q\,\mathrm{sen}\,2\omega t$$

y también se podrá decir que la potencia eléctrica instantánea absorbida o cedida por un circuito pasivo esta compuesta por dos términos:

1) Un término fluctuante, $P(1 + \text{sen}\,(2\omega t - \pi/2))$, siempre positivo, de pulsación 2ω y de valor medio $P = UI\cos\varphi$

2) Un término fluctuante positivo y negativo de pulsación 2ω

$$-UI\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,2\omega t = -Q\,\text{sen}\,2\omega t$$

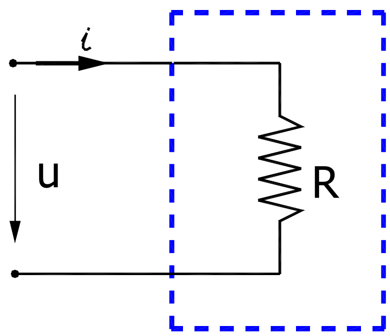
y valor medio nulo.

Es como si un dipolo consumiera dos potencias, una siempre positiva y de valor medio P y otra puramente fluctuante (se almacena y despues se cede) de valor medio nulo y valor máximo Q.

Bajo este punto de vista vamos a analizar la potencia consumida por los diferentes elementos pasivos del circuito eléctrico en cuestión.

7.1.1.- Elemento resistencia

Supongamos que el dipolo considerado es una resistencia pura,



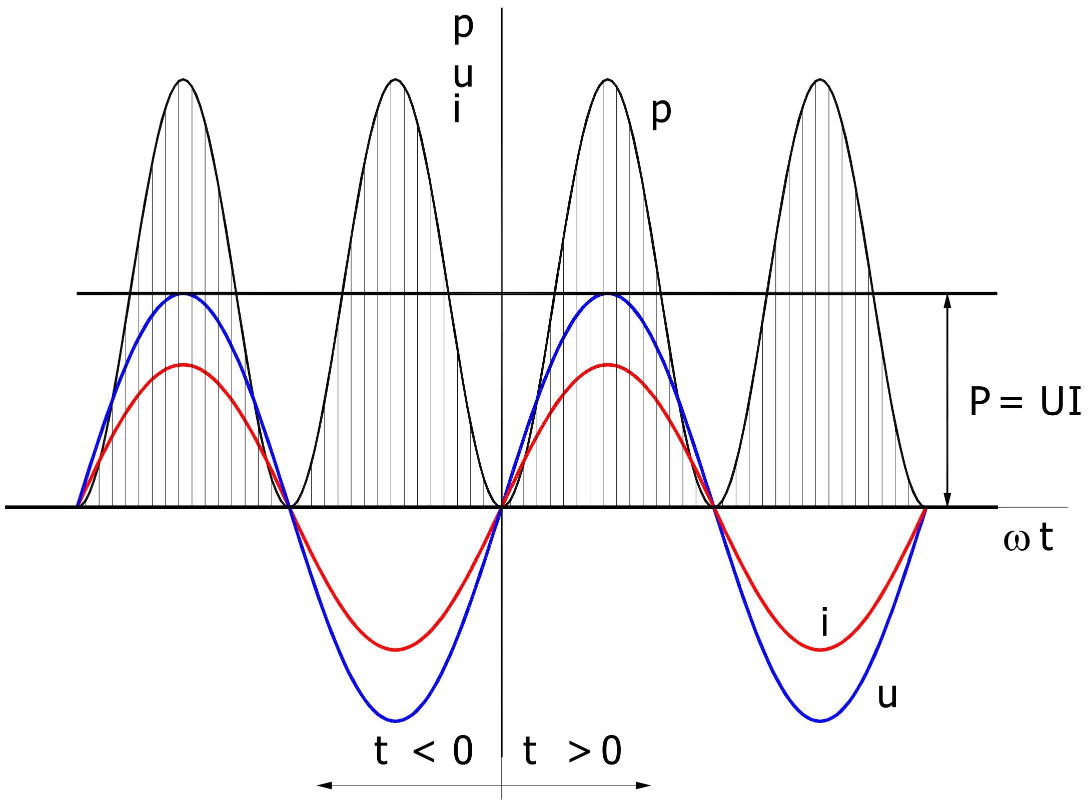
Excitación: $u = \sqrt{2}\,U\,\text{sen}\,\omega t$

Respuesta: $i = \sqrt{2}\,I\,\text{sen}\,\omega t$

la intensidad está en fase con la tensión o sea $\varphi = 0$ por lo que la potencia instantánea absorbida por la resistencia R será:

$$p(t) = P\,(1 + \text{sen}\,(2\omega t - \pi/2)) - UI\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,(2\omega t) \qquad \text{para } \varphi=0$$
$$p(t) = P\,(1 + \text{sen}\,(2\omega t - \pi/2))$$

El segundo termino se anula y solo nos queda el 1º término fluctuante (+)



Gráfica de potencia, tensión e intensidad para el elemento resistencia

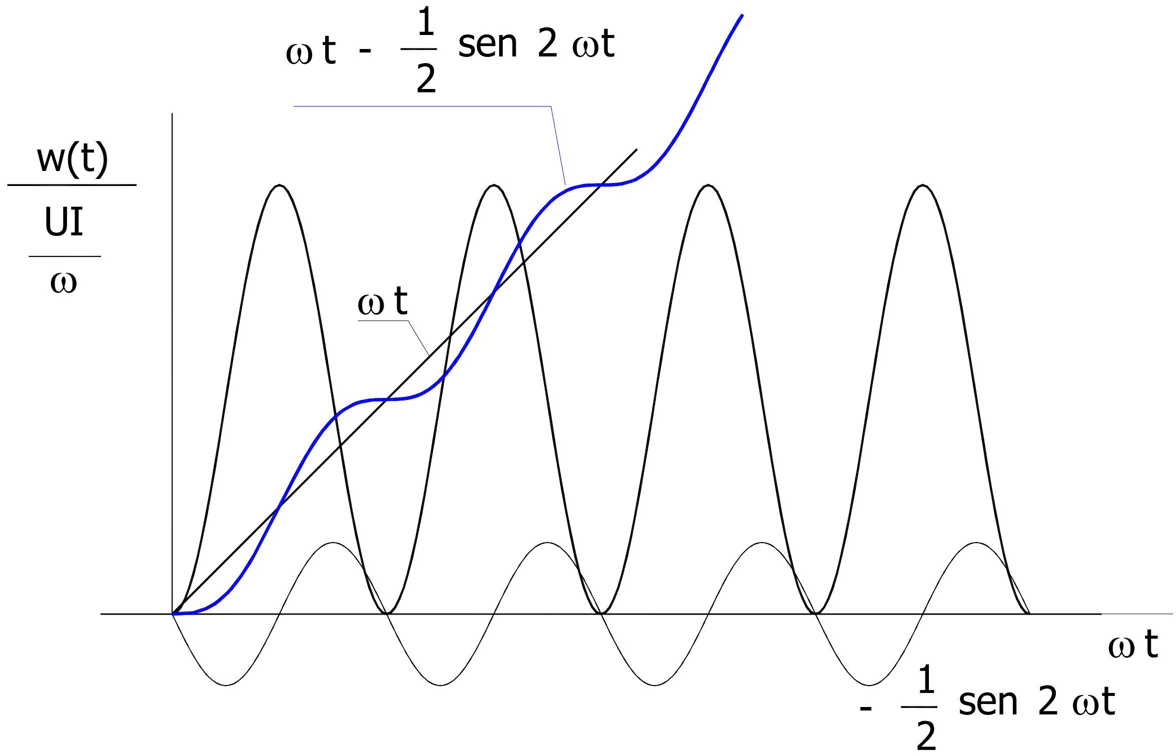
El valor medio de **p** será igual a: $P = P_{med} = UI \cos \varphi = UI$ y expresada en función de R teniendo en cuenta que U = R I será: $\mathbf{P = R\, I^2 = U^2/R}$ que es la expresión de la ley de Joule (Recuérdese que el valor eficaz se podía definir como la corriente constante que producía sobre una resistencia igual calor que una corriente alterna en un período de tiempo T)

La energía consumida por R en un tiempo t será:

$$dw = p\, dt$$

$$w_R = UI \int_0^t (1 - \cos 2\omega t)\, dt = UI \left(t - \frac{\text{sen } 2\omega t}{2\omega} \right)_0^t = UIt - \frac{UI}{2\omega} \text{ sen } 2\omega t$$

y en la gráfica de energía vemos que va aumentando continuamente.



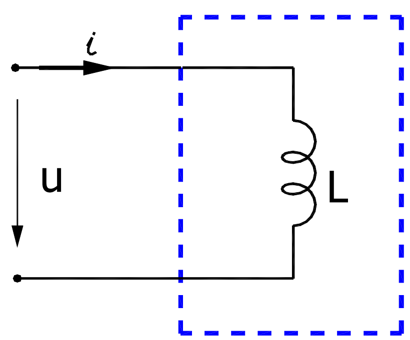
Gráfica de Energía

En el eje vertical se ha escogido la variable y de valor: $y = w(t) / (UI / \omega)$ por lo que la función que se representa es $y = \omega t - 1/2 \text{ sen } (2\omega t)$.

Si hacemos la derivada con respecto al tiempo: $dy/dt = \omega - \omega \cos (2\omega t)$ podemos observar que nunca la pendiente es negativa siempre es positiva o nula, por lo que siempre consume energía.

7.1.2.- Elemento inductancia (bobina)

Supongamos que el dipolo es una inductancia pura,



Excitación: $u(t) = \sqrt{2}U \text{ sen } \omega t$
Respuesta: $i(t) = \sqrt{2}I \text{ sen } (\omega t - \pi/2)$

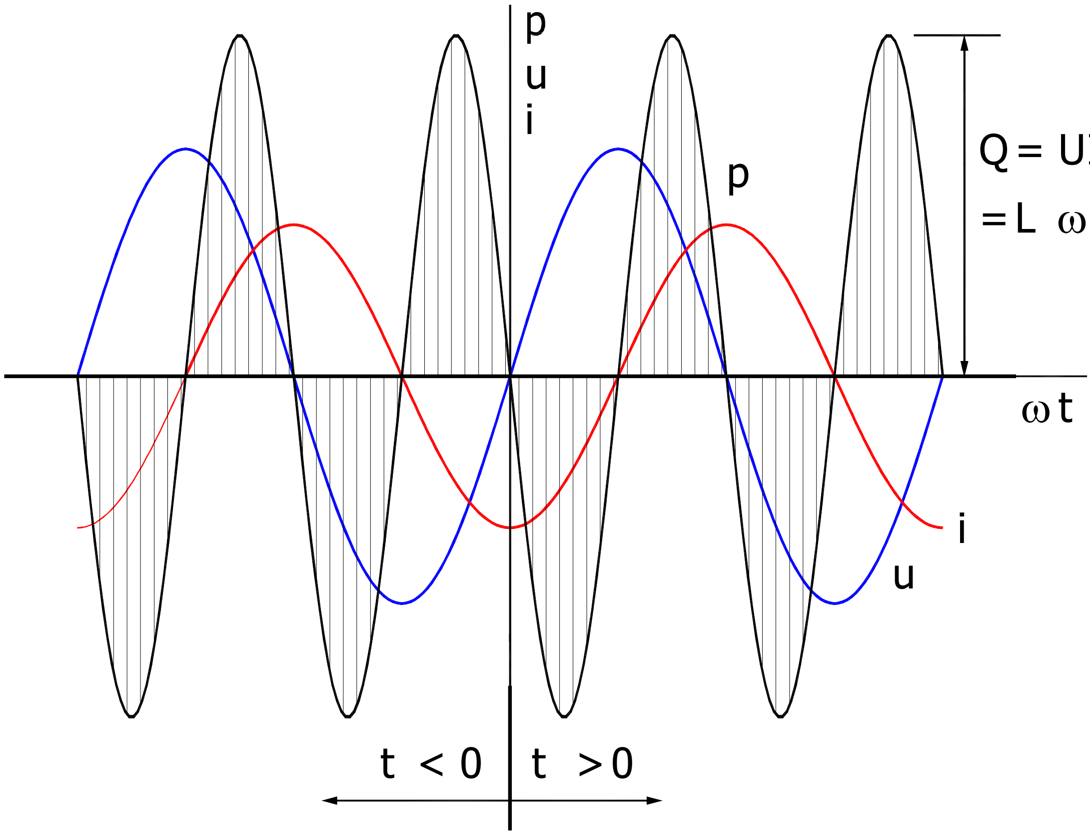
$$p(t) = P(1 + \text{ sen } (2\omega t - \pi/2)) - UI \text{ sen } \varphi \text{ sen } (2\omega t)$$

la intensidad esta retrasada π/2 radianes con respecto a la tensión, ($\varphi = \pi/2$), por tanto la potencia instantánea será:

$$p(t) = -\,UI \ \text{sen} \ \frac{\pi}{2} \ \text{sen} \ 2\omega t = -\,Q_L \ \text{sen} \ 2\omega t = -\,UI \ \text{sen} \ (2\omega t)$$

$$Q_L = UI \ \text{sen} \ \frac{\pi}{2} = UI = \frac{U^2}{L\omega} = L\omega I^2$$

El valor medio de la onda con amplitud (cresta) Q_L y pulsación 2ω es "**nulo**", con lo que la potencia transferida media (absorbida o generada) es nula.



Gráfica de potencia, tensión e intensidad para el elemento inductancia

Como puede comprobarse la potencia absorbida es negativa (la bobina se comporta como generador) cuando la intensidad decrece en valor absoluto.

La energía almacenada por la bobina será

$$dw = u\,i\,dt = L\,\frac{di}{dt}\,i\,dt = L\,i\,di$$

La variación de energía almacenada por la bobina entre dos instantes en el campo magnético de está será:

$$w_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} L\, i\, di = \frac{1}{2} L\, i^2(t_1) - \frac{1}{2} L\, i^2(t_0) =$$

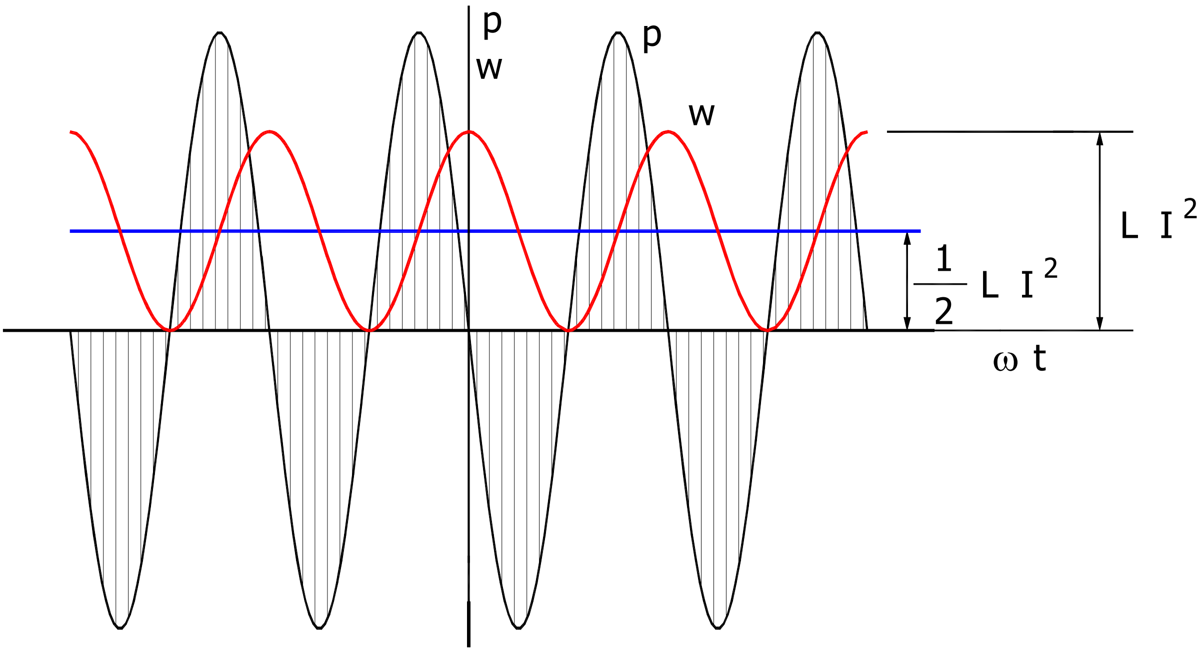
$$= L\, I^2 \operatorname{sen}^2 (\omega\, t_1 - \frac{\pi}{2}) - L\, I^2 \operatorname{sen}^2 (\omega\, t_0 - \frac{\pi}{2})$$

Si consideramos un instante, t_0, en el cual la intensidad en ese instante es cero, el valor medio de la energía almacenada será:

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T w\, dt = \frac{L}{2T} \int_0^T i^2\, dt = \frac{2LI^2}{2T} \int_0^T \operatorname{sen}^2 (\omega t - \pi/2)\; dt =$$

$$= \frac{LI^2}{2T} \int_0^T (1 - \cos\; (2\omega t - \pi))\, dt = \frac{1}{2} L \frac{I^2}{T} \left[T - \frac{\operatorname{sen}(3\pi) - \operatorname{sen}(-\pi)}{2\omega} \right] = \frac{1}{2} L\, I^2$$

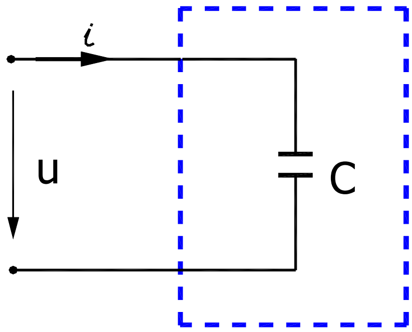
La energía almacenada en el campo magnético de la bobina en función del tiempo será la representada en la figura



Gráfica de Energía y potencia para el elemento inductancia

7.1.3.- Elemento CONDENSADOR

Supongamos que el dipolo es un condensador puro,



Excitación: $u(t) = \sqrt{2}U \; sen \; \omega t$

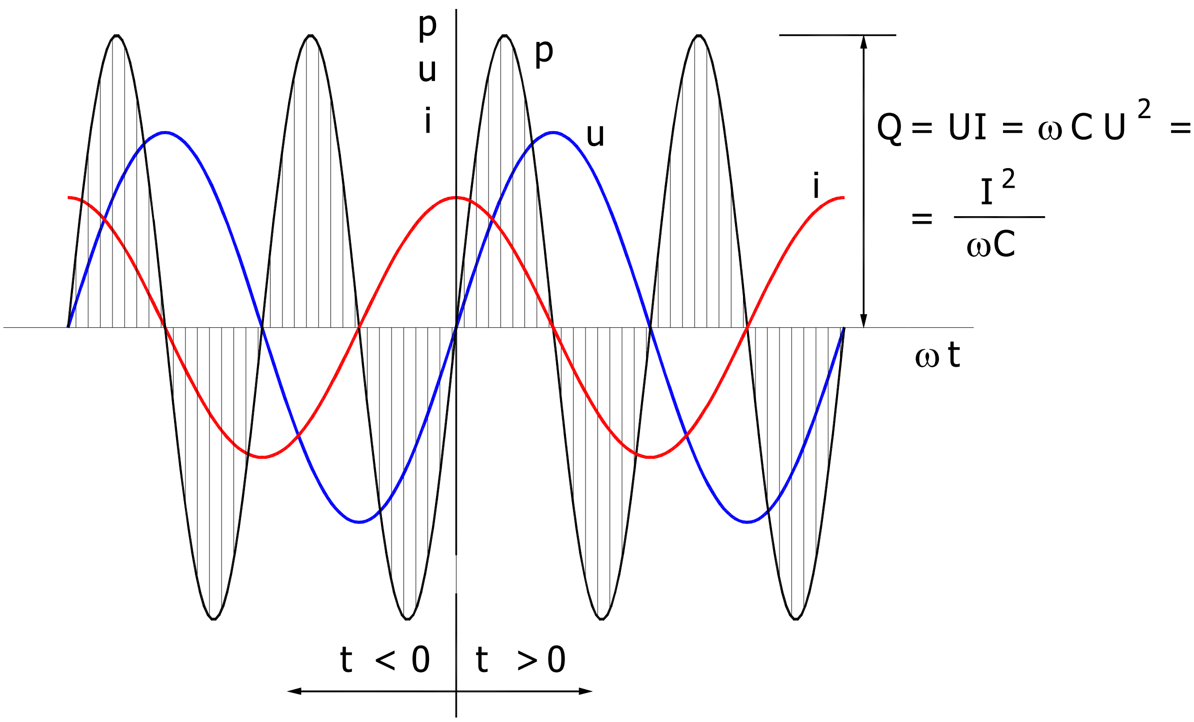
Respuesta: $i(t) = \sqrt{2}I \; sen \; (\omega t + \pi/2)$

$$p(t) = P\,(1 + sen\;(2\omega t - \pi/2)) - UI \; sen \; \varphi \; sen\;(2\omega t)$$

la intensidad esta adelantada $\pi/2$ radianes (90º) con respecto a la tensión ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$) por lo que

$$P = UI\;\cos\;(-\pi/2) = 0 \qquad y \qquad Q = UI\;sen\;(-\pi/2) = -\,UI$$

y la potencia instantánea consumida será: $p(t) = UI\;sen\;(2\omega t)$ que puede representarse en la figura siguiente



Gráfica de Potencia, tensión e intensidad para el elemento condensador

donde se comprueba que la potencia en juego va siendo alternativamente positiva y negativa.

El valor medio de la potencia será evidentemente nulo.

La energía almacenada en el condensador entre dos instantes, t_0 y t_1, valdrá:

$$dw = u\,i\,dt = u\,\frac{dq}{dt}\,dt = C\,u\,du$$

$$w_{t_o}^{t_1} = \frac{1}{2}\,C\,u^2(t_1) - \frac{1}{2}\,C\,u^2(t_0)$$

si en el instante t_0 resulta que: $u(t_0) = 0$ entonces: $w = \frac{1}{2}\,C\,u^2 = C\,U^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega t$

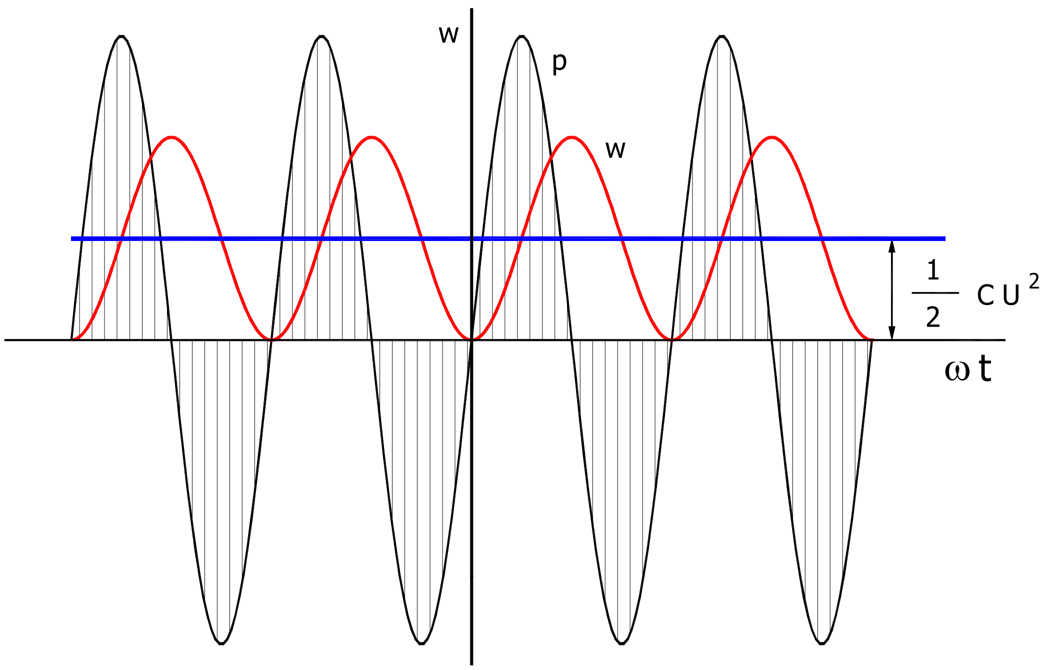
El valor medio de la energía almacenada por el condensador valdrá:

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T C\,U^2\;\mathrm{sen}^2\;\omega t\;dt = \frac{C\,U^2}{T}\int_0^T \mathrm{sen}^2\;\omega t\;dt =$$

$$= \frac{C\,U^2}{2\,T}\int_0^T (1 - \cos\;2\omega t)\;dt = \frac{1}{2}\frac{C\,U^2}{T}\left[t - \frac{\mathrm{sen}\;2\omega t}{2\omega}\right]_0^T =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{C\,U^2}{T}\,T = \frac{1}{2}\,C\,U^2$$

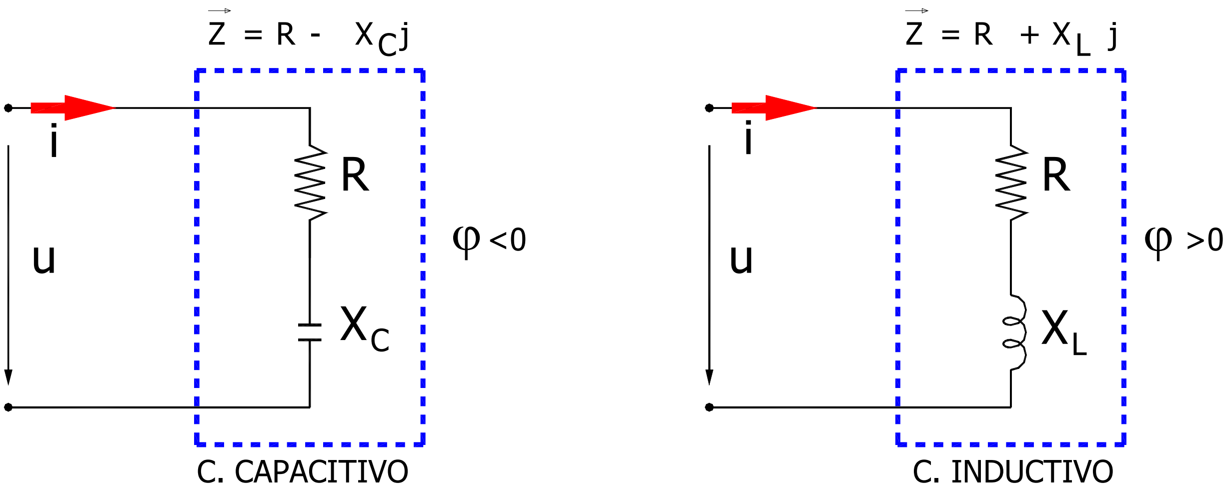
La energía almacenada en el campo eléctrico del condensador en función del tiempo será la representada en la figura siguiente:



Gráfica de Energía y potencia del elemento condensador

7.2.- POTENCIA ACTIVA, POTENCIA REACTIVA Y POTENCIA APARENTE. TRIÁNGULO DE POTENCIA.

Todo dipolo pasivo excitado con una tensión alterna senoidal se puede reducir a una resistencia en serie con un condensador (**circuito capacitivo**), o una resistencia en serie con una bobina (**circuito inductivo**).



La potencia instantánea consumida por este dipolo pasivo será, como ya hemos visto:

$$p(t) = P\,(1 - \cos\,(2\omega t)) - UI\,\operatorname{sen}\,\varphi\,\operatorname{sen}\,(2\omega t)$$

Siendo el primer termino la potencia consumida por la resistencia, R, de la impedancia y el segundo termino la potencia puesta en juego por la reactancia, X, de la impedancia.

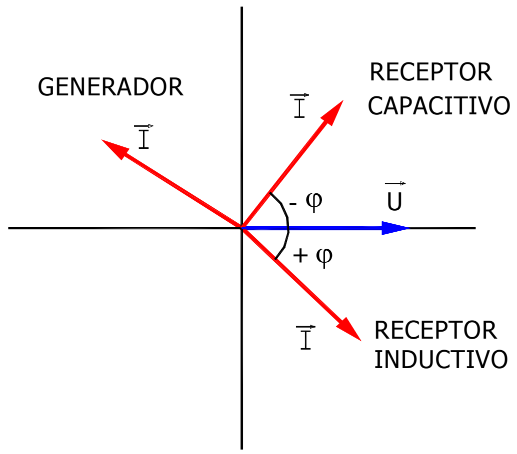
☞ Se denomina **Potencia activa, real o verdadera** al valor medio de la potencia instantánea, $\mathbf{P = U\,I\,\cos\varphi}$, sus unidades se dan en watios (W) y es la potencia transferida a la impedancia. Como solo R consume potencia será la potencia consumida por R con lo que

$$\mathbf{P = U\,I\,\cos\varphi = R\,I^2}$$

La potencia activa depende directamente del desfase que hay entre **u** e **i** por lo que al valor de **cos φ** se le llama **factor de potencia.**

En un dipolo pasivo $P \geq 0$ pues en el no hay fuentes de energía, por consiguiente el f.d.p. ha de ser: $\cos\varphi \geq 0$. Si $\cos\varphi < 0$, el dipolo esta suministrando energía y por tanto ha de contener fuentes energéticas lo que quiere decir que no puede ser pasivo.

Si tomamos como origen la tensión u aplicada al dipolo y representamos simbólicamente i e u,



la intensidad estará dentro del primer y cuarto cuadrante siempre que el receptor sea pasivo ($P > 0 \rightarrow \cos \varphi > 0$) y si ocupa los cuadrantes tercero y segundo el circuito actúa como generador, o sea, suministrando energía.

☞ Se denomina **potencia reactiva** al valor máximo de la potencia fluctuante positiva y negativa de valor medio nulo. Si la potencia fluctuante (+) y (-) vale $-UI \ \text{sen} \ \varphi \ \text{sen} \ 2\omega t = -Q \ \text{sen} \ 2\omega t$ el valor máximo será:

$\mathbf{Q = U\,I\ sen\ \varphi}$	**Potencia Reactiva**
Q (+) para φ (+)	Carga inductiva
Q (-) para φ (-)	Carga capacitiva

La unidad de esta potencia es el voltamperio reactivo (VAr).

La potencia reactiva representa un bombeo de energía que es necesaria para el funcionamiento del receptor pero que no nos da ninguna energía útil. A veces, se le llama potencia magnetizante, por ser la consumida en los circuitos magnéticos de las máquinas para crear el flujo, aunque no es consumida (solo las pérdidas), sino que es almacenada en el campo magnético para ser devuelta más tarde, en la desconexión.

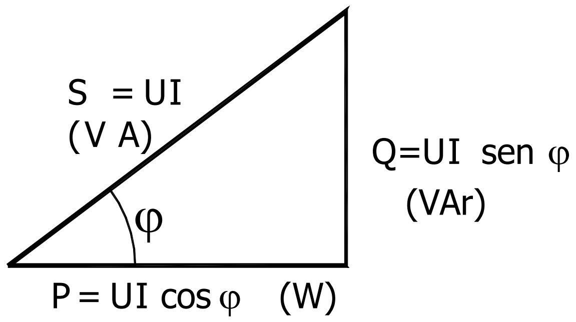
☞ Se denomina **Potencia Aparente** al producto de la tensión eficaz por la intensidad eficaz.

$$\mathbf{S = U\,I}$$

y su unidad es el voltamperio (VA).

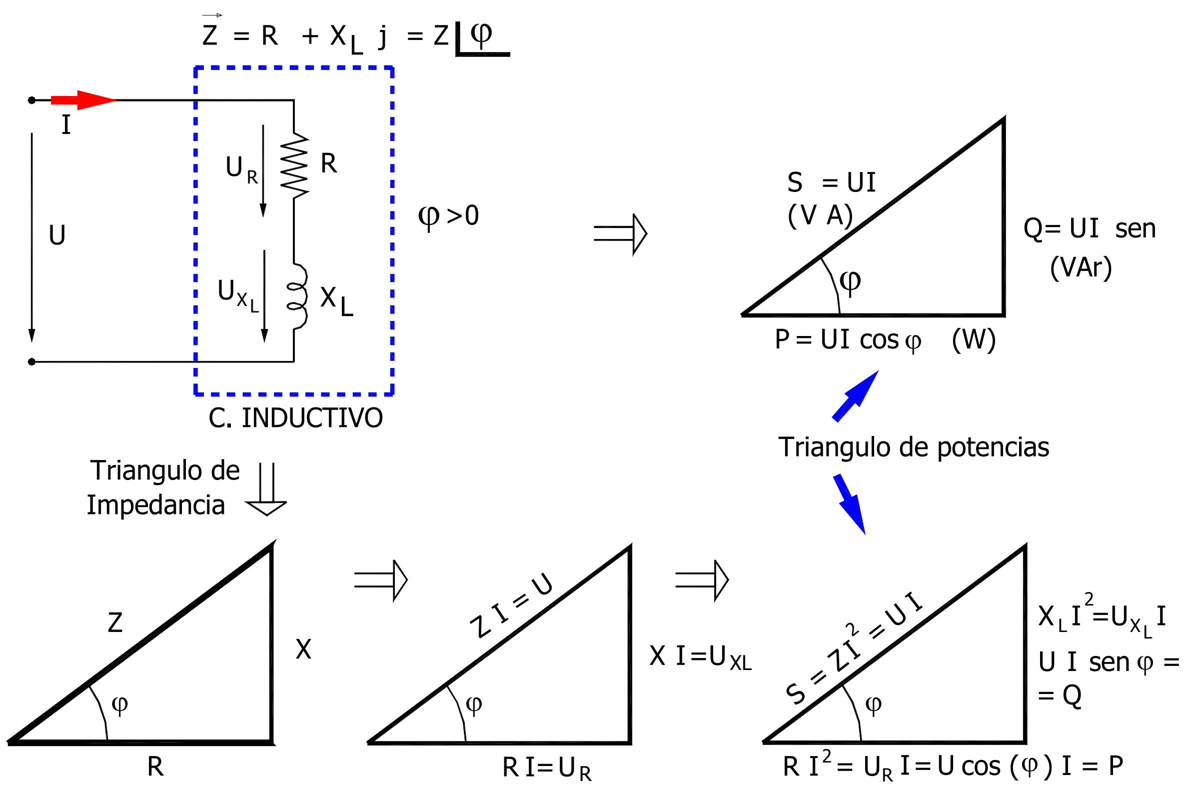
En corriente continua la potencia transferida es el producto UI. En corriente alterna la potencia aparente S coincide con la potencia activa P, cuando la impedancia se compone sólo de RESISTENCIA.

De acuerdo con estas definiciones se puede crear un triángulo rectángulo llamado "**Triángulo de Potencias**", según se muestra en la figura, de forma que los lados del triangulo representen a la potencia activa, reactiva y aparente.



El triángulo de potencias se puede obtener a partir del triángulo de impedancias ya definido anteriormente, veamoslo para una impedancia inductiva genérica y otra capacitiva.

- Impedancia inductiva:



Dada una impedancia inductiva, el "**Triángulo de impedancias**" de esta será un triángulo rectángulo cuyos catetos son la resistencia y la reactancia, y la hipotenusa es el modulo de la impedancia Z. Si multiplicamos cada lado del triángulo de impedancias por el valor eficaz de la intensidad, I, se obtiene un nuevo triángulo cuya hipotenusa representa la caída de tensión en la impedancia en valor eficaz, U, y cuyos catetos representan, respectivamente, las caídas de tensión en la resistencia y en la reactancia de la carga, también en valor eficaz. A este triángulo se le da el nombre de "**Triángulo de tensiones**".

Caída de tensión: en la resistencia: $U_R = I\ R$ (representado por el cateto horizontal)
en la reactancia: $U_X = I\ X$ (representado por el cateto vertical)
en la impedancia: $U = U_Z = I\ Z$ (representado por la hipotenusa del triang.)

Como se mantiene la semejanza entre los dos triángulos, implica que el ángulo comprendido entre la hipotenusa y el cateto horizontal es el mismo en los dos triángulos, o sea, el desfase entre la tensión y la intensidad, dicho de otro modo, el argumento de la impedancia compleja.

Si a continuación, se multiplica de nuevo, cada uno de los lados del triángulo de tensiones por el valor eficaz de la intensidad, I, se obtiene un nuevo triángulo que veremos que es el denominado "**Triángulo de potencias**", cuya hipotenusa representa a la potencia aparente, el cateto horizontal representa la potencia activa y el cateto vertical representa a la potencia reactiva.

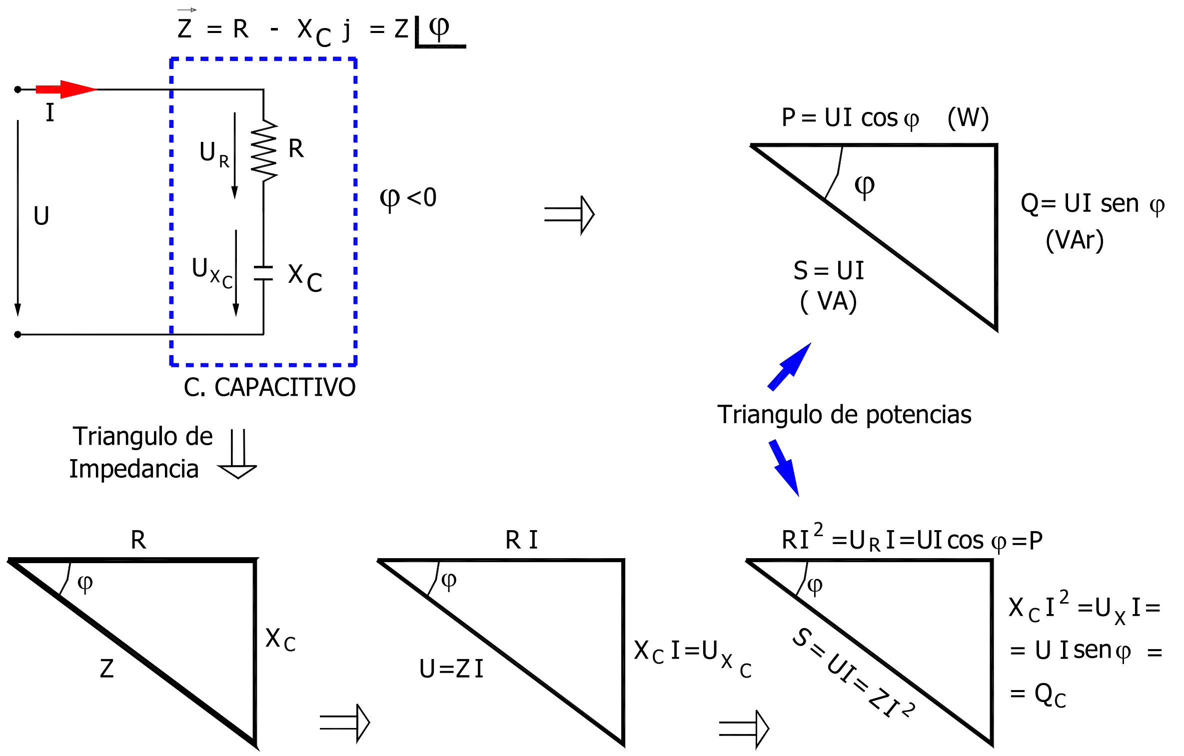
Al multiplicar cada lado del triángulo de tensiones por I, tal como sucedía anteriormente, se mantiene la semejanza con el triángulo de tensiones, con lo que el ángulo comprendido entre la hipotenusa y el cateto horizontal sigue siendo φ.

La longitud de la hipotenusa del nuevo triángulo será: UI, es decir la potencia aparente, **S = UI**.

La longitud del cateto horizontal será: $U_R\ I = RI^2$, ahora bien, esta longitud también es igual a **UIcos φ = P**, la potencia activa de la impedancia, por lo que se puede concluir que la potencia activa de un receptor que posea una resistencia equivalente R es igual al producto de la resistencia por el cuadrado de la intensidad que circula por ella, es decir RI^2. Por otra parte, la longitud del cateto vertical del nuevo triángulo será: $U_X\ I = XI^2$, ahora bien, esta longitud también es igual a **UIsen φ = Q**, la potencia reactiva de la impedancia, por lo que se puede concluir que la potencia reactiva de un receptor que posea una reactancia equivalente X es igual al producto de la reactancia por el cuadrado de la intensidad que circula por ella, es decir XI^2.

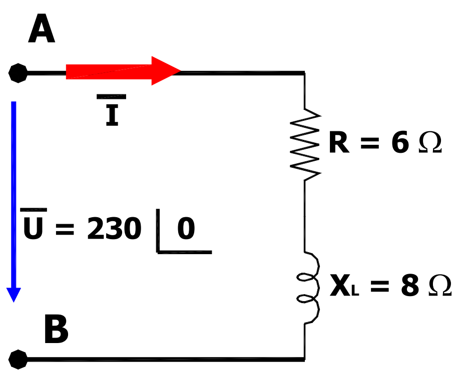
Con esto, queda visto, que el triángulo de potencias se puede obtener a partir del triángulo de impedancias para una impedancia inductiva genérica.

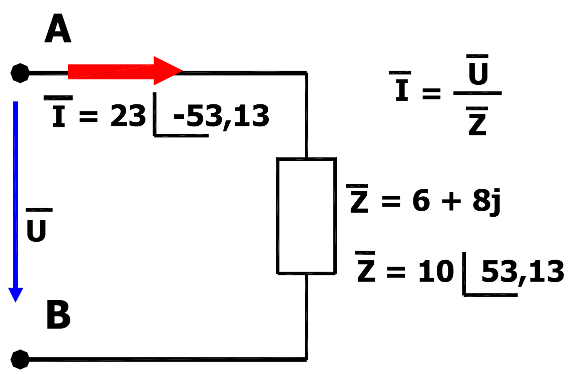
- Impedancia capacitiva:



Ejemplo: *Determinar el balance de potencias correspondiente a un receptor de impedancia Z = 6 + 8 j excitado con una tensión alterna senoidal de valor eficaz 230 V.*

Solución:





Si tomamos como origen de fases la tensión entre A y B, la intensidad circulante será

$$\overline{U}_{AB} = 230 \underline{|0} \quad \rightarrow \quad \overline{I}_{AB} = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{AB}} = \frac{230 \underline{|0}}{10 \underline{|53{,}13}} = 23 \underline{|-53{,}13} = 13{,}8 - 18{,}4\, j$$

Por tanto las tensiones parciales serán:

$U_R = I_R\, Z_R = 23 \times 6 = 138$ V en fase con la intensidad

$U_L = I_L\, Z_L = 23 \times 8 = 184$ V adelantada 90º a la intensidad

$\overline{U}_R = 138 \underline{|-53{,}13 + 0} = 138 \underline{|-53{,}13} = 138{\times}0{,}6 + 138{\times}(-0{,}8)j = 82{,}8 - 110{,}4j$

$\overline{U}_L = 184 \underline{|-53{,}13 + 90} = 184 \underline{|36{,}89} = 184{\times}0{,}6 + 184{\times}0{,}8j = 147{,}2 + 110{,}4j$

Comprobación:

$$\overline{U}_{AB} = \overline{U}_R + \overline{U}_L = (147{,}2+82{,}8) + (110{,}4-110{,}4)\,j = 230 + 0\,j = 230 \underline{|0}$$

La **potencia media** consumida por esta impedancia será:

$$P_{AB} = U_{AB}\, I_{AB}\, \mathrm{Cos}(\varphi_{AB}) = 230 \times 23 \times \mathrm{Cos}\,(53{,}11) = 3174 \text{ W}$$

que lógicamente coincidirá con la potencia absorbida por la resistencia:

$$P_R = U_R\, I_R = R\,(I_R)^2 = (U_R)^2/R = 138 \times 23 = 6 \times 23^2 = 3174 \text{ W}$$

La **potencia reactiva**, o dicho de otro modo, el valor máximo de la potencia fluctuante puesta en juego por esta impedancia tendrá por valor:

$$Q_{AB} = U_{AB}\, I_{AB}\, \mathrm{Sen}(\varphi_{AB}) = 230 \times 23 \times \mathrm{Sen}\,(53{,}11) = 4234 \text{ VAr}$$

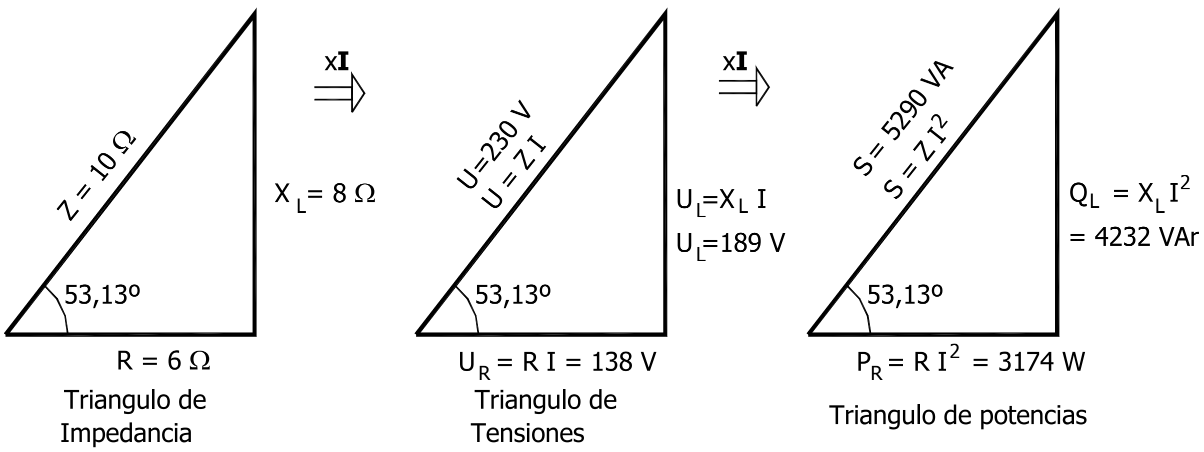
que lógicamente coincidirá con la potencia reactiva puesta en juego por la bobina:

$$Q_R = U_L\, I_L = X_L\,(I_L)^2 = (U_L)^2/X_L = 184 \times 23 = 8 \times 23^2 = 4232 \text{ Var}$$

La **potencia aparente** valdrá:

$$S_{AB} = U_{AB}\, I_{AB} = 230 \times 23 = 5290 \text{ VA}$$

Todos estos valores se podrían haber obtenidos a partir del triangulo de impedancias, obteniendo al final el triangulo de potencias correspondiente a la impedancia compleja en estudio.



La expresión temporal de la potencia instantánea seria:

$$p(t) = P\,(1 + \mathrm{Sen}\,(2\omega t - \pi/2)) - Q\ \mathrm{Sen}\,(2\omega t) =$$

$$= 3174\,(\,1 + \mathrm{Sen}(\,200\,\pi\,t - \pi/2\,)\,) - 4232\ \mathrm{Sen}(\,200\,\pi\,t\,)$$

Ejemplo: *Determinar el balance de potencias correspondiente a la impedancia Z = 3 - 4 j excitada con una tensión alterna senoidal de valor eficaz 50 V.*

Solución:

Si tomamos como origen de fases la tensión en bornes de la impedancia, la intensidad circulante será:

$$\overline{U} = 50 \underline{|0} \;\; \text{—>} \;\; \overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \frac{50 \underline{|0}}{5 \underline{|-53{,}13}} = 10 \underline{|+53{,}13}$$

Por tanto las tensiones parciales serán:

$U_R = I_R\, Z_R = 10 \times 3 = 30$ V en fase con la intensidad

$U_L = I_C\, Z_C = 10 \times 4 = 40$ V retrasada 90º con respecto a la intensidad

$$\overline{U}_R = 30 \underline{|+53{,}13 + 0} = 30 \underline{|+53{,}13} = 30{\times}0{,}6 + 30{\times}0{,}8j = 18 + 24j$$

$$\overline{U}_C = 40 \underline{|+53{,}13 - 90} = 40 \underline{|-36{,}89} = 40{\times}0{,}8 + 40{\times}0{,}6j = 32 - 24j$$

Comprobación:

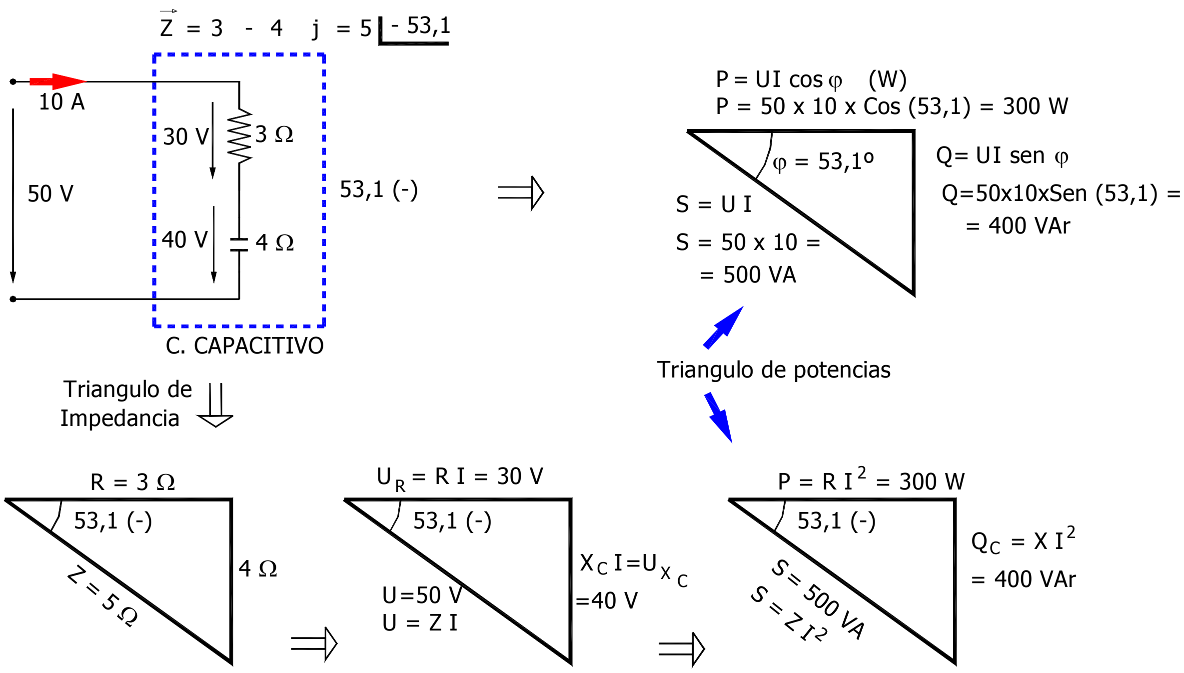
$$\overline{U}_{AB} = \overline{U}_R + \overline{U}_L = (18+32) + (24-24)\,j = 50 + 0\,j = 50 \underline{|0}$$

El balance de potencias será:

$P = U\, I \operatorname{Cos} \varphi = 50 \times 10 \times 0{,}6 = 300$ W

$Q = U\, I \operatorname{Sen} \varphi = 50 \times 10 \times 0{,}8 = 400$ VAr

$S = U\, I = 50 \times 10 = 500$ VA



La potencia instantánea seria: $p(t) = 300\,(\,1 + \operatorname{Sen}(\,200\,\pi\, t - \pi/2\,) + 400 \operatorname{Sen}(\,200\,\pi\, t\,)$

7.3.- POTENCIA COMPLEJA

La potencia reactiva unas veces puede ser positiva si φ(+) y otras negativas si φ(-), por lo que para unificar criterios y desde un punto de vista operacional se emplea la potencia compleja, que no es más que la potencia aparente expresada en forma compleja.

$$\boxed{\overline{S} = P + j\,Q = U\,I\cos\varphi + j\,U\,I\,\mathrm{sen}\,\varphi = U\,I\,\underline{|\,\varphi}}$$

El producto de la tensión por la intensidad, nos da la potencia aparente, por lo que podríamos pensar que el producto del fasor $\overline{U}$ por el fasor $\overline{I}$ nos daría la potencia compleja: $\overline{S} = \overline{U}\,\overline{I}$ pero no es así, $\overline{S} \neq \overline{U}\,\overline{I}$, veamoslo:

Sea un dipolo pasivo de carácter inductivo $\overline{Z} = Z\,\underline{|\,\varphi}$, la potencia compleja correspondiente será: $\overline{S} = UI\,\underline{|\,\varphi}$, pero si multiplicamos el fasor $\overline{U} = U\,\underline{|\,\alpha}$ por el fasor $\overline{I} = I\,\underline{|\,\alpha-\varphi}$, resulta que la potencia aparente será:

$$\overline{S} = U\,\underline{|\alpha} \cdot I\,\underline{|\alpha-\varphi} = U\,I\,\underline{|2\alpha-\varphi} \qquad \text{MAL}$$

para que la expresión matemática corresponda con la naturaleza inductiva o capacitiva de la potencia debemos multiplicar la tensión por la conjugada de la intensidad, es decir:

$$\boxed{\overline{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{U}}\,\overline{\mathbf{I}}^{\,*}}$$

siendo: $\overline{I}^{\,*} = I\,\underline{|\,-(\alpha-\varphi)}$; Por lo que en el caso anterior resultará:

$$\overline{S} = \overline{U}\,\overline{I}^{\,*} = U\,\underline{|\alpha} \cdot I\,\underline{|\,-\alpha+\varphi} = U\,I\,\underline{|\,\varphi} \qquad \varphi(+) \quad \text{Carga inductiva}$$

Si la impedancia es capacitiva $\overline{Z} = Z\,\underline{|\,-\varphi}$, se tendrá que:

$$\overline{U} = U\,\underline{|\,\alpha}\ ,\ \overline{I}\,\underline{|\,\alpha+\varphi} \qquad \text{e} \qquad \overline{I}^{\,*} = I\,\underline{|\,-(\alpha+\varphi)}$$

Y por tanto la potencia compleja será:

$$\overline{S} = \overline{U} \cdot \overline{I}^{\,*} = U\,\underline{|\,\alpha} \cdot I\,\underline{|\,-(\alpha+\varphi)} = U\,I\,\underline{|\,-\varphi} \qquad \varphi(\text{-}) \text{ Carga capacitiva}$$

Ejemplo*: Determinar el balance de potencias correspondientes a un receptor al que se le aplica una tensión: $u_{AB}(t)=325{,}27$ sen (wt - 60º) V y por el cual circula una intensidad $i_{AB}(t)=14{,}1421$ sen (wt - 90º) A*

Solución:

Los fasores que representan a las ondas serán:

$\overline{U}_{AB} = 230 \angle{-60}$ e $\overline{I}_{AB} = 10 \angle{-90}$

y la impedancia compleja equivalente al receptor:

$$\overline{Z}_{AB} = Z \angle\varphi = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{I}_{AB}} = \frac{230 \angle{-60}}{10 \angle{-90}} = 23 \angle 30 = 19{,}92 - 11{,}5\,j \text{ (receptor capacitivo)}$$

por lo que la potencia activa, reactiva y aparente valdrán:

P = U I Cos φ = 230 ×10 × 0,866 = 1991,86 W

Q = U I Sen φ = 230 ×10 × 0,5 = 1150 VAr

S = U I = 230 ×10 = 2300 VA

La potencia compleja tendra por expresion:

$\overline{S}_{AB} = P + j\,Q = U\,I \angle\varphi = 2300 \angle 30 = 1991{,}86 + 1150j$

la cual la podemos obtener a partir de:

$\overline{S} = \overline{U}\,\overline{I}^{\,*} = 230 \angle{-60} \cdot 10 \angle{+90} = 2300 \angle{+30} = 1991{,}86 + 1150j$

Y la potencia instantanea demandada o suministrada por el receptor será:

p(t) =P (1 + sen(2ωt - 90º)) - Q sen(2ωt)

= 1991,86 (1 + sen(2ωt - 90º)) - 1150 sen(2ωt)

7.4.- TEOREMA DE BOUCHEROT

"***La potencia activa suministrada a un circuito es la suma de las potencias activas absorbidas por los diferentes elementos del circuito y la potencia reactiva es igualmente la suma de las potencias reactivas absorbidas o cedidas por sus elementos***" , por otra parte, la potencia aparente total es la suma vectorial de las potencias aparentes individuales.

Esto puede escribirse de la siguiente manera:

$$P = \sum P_K$$
$$Q = \sum Q_K$$

La potencia aparente total absorbida será:

$$S = \sqrt{(\sum P_K)^2 + (\sum Q_K)^2}$$

La potencia aparente no es por tanto la suma de las potencias aparentes y es preciso, para calcularla, hallar sus componentes activa y reactiva.

Hay que tener bien presente que cuando se trata de sumar potencias reactivas, la potencia reactiva absorbida por una bobina es

$$X_L\, I^2 = \omega L\, I^2 = U^2/\omega L$$

y la correspondiente a un condensador es

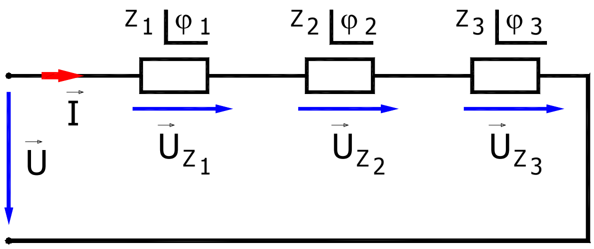
$$X_C\, I^2 = -\frac{1}{\omega C}\, I^2 = -\,\omega C\, U^2$$

y que cada uno de estos términos ha de tomarse con su signo.

Ejemplo: CIRCUITO SERIE.

En el circuito de la figura siguiente la potencia compleja tendrá por expresión:

$$\overline{S} = \overline{U}\,\overline{I}^{\,*} = \left(\overline{U}_{Z_1} + \overline{U}_{Z_2} + \overline{U}_{Z_3}\right)\overline{I}^{\,*} = = S_1 \,\underline{|\varphi_1} + S_2 \,\underline{|\varphi_2} + S_3 \,\underline{|\varphi_3} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_3$$



Para sumar números complejos sumamos parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria, por lo que:

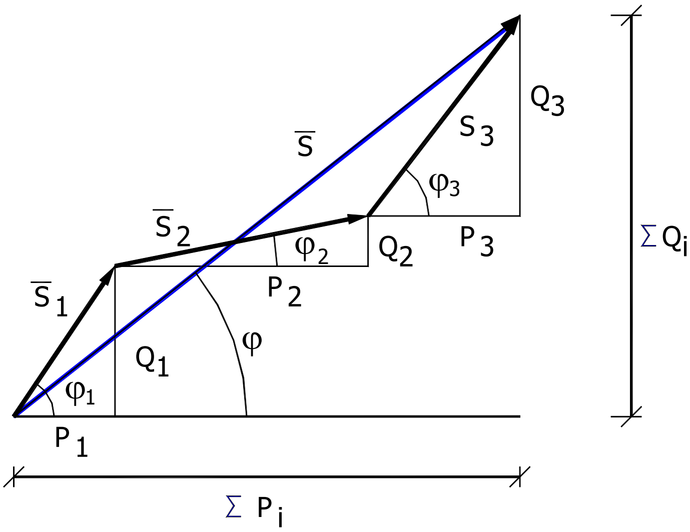
$$\overline{S} = \Sigma P_i + j\ \Sigma Q_i$$

siendo la potencia aparente

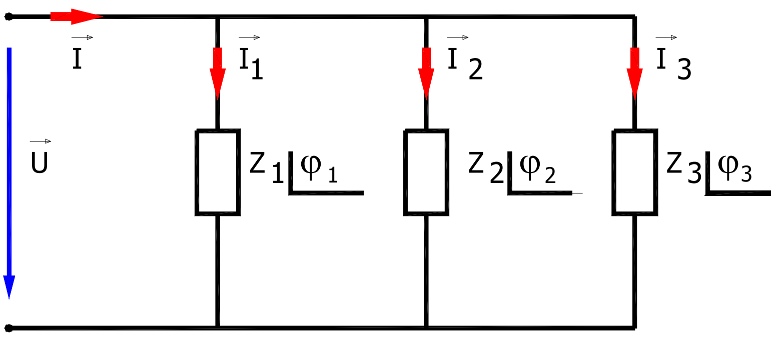
$$S = \sqrt{(\sum P_K)^2 + (\sum Q_K)^2}\ \text{VA}$$

y por tanto

$$|\ \overline{S}\ | \neq \sum S_i$$



Ejemplo: CIRCUITO PARALELO



En el circuito de la figura la potencia compleja vale

$$\overline{S} = \overline{U}\,\overline{I}^{\,*} = \overline{UI}_1^{\,*} + \overline{UI}_2^{\,*} + \overline{UI}_3^{\,*} = S_1\ \underline{|\varphi_1} + S_2\ \underline{|\varphi_2} + S_3\ \underline{|\varphi_3} =$$

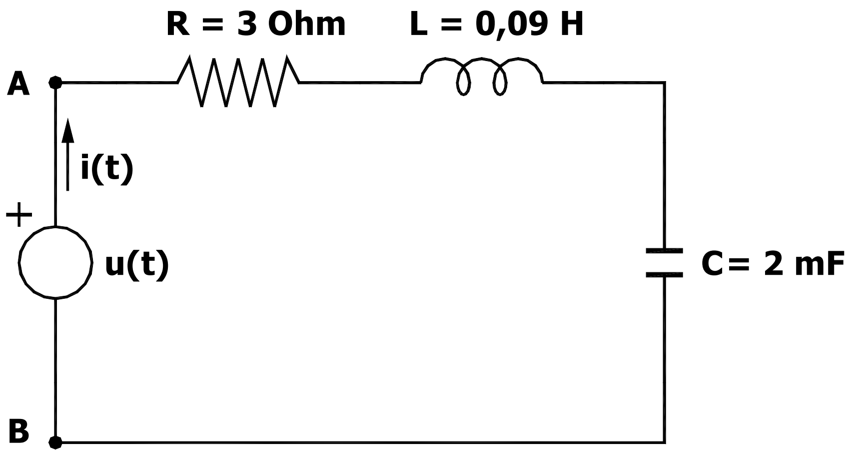
$$= \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_3 = \Sigma P_i + j\ \Sigma Q_i$$

y por tanto la potencia aparente tendrá por expresión: $S = \sqrt{(\sum P_K)^2 + (\sum Q_K)^2}$ VA

Ejemplo: *Dado el circuito de la figura determinar*

1) Intensidad y potencia instantánea dada por la fuente

2) Potencia compleja entre A y B



Nota: $u(t) = \sqrt{2}\,50 \text{ sen } (100t)$

Solución: Para resolver el circuito utilizaremos el método simbólico, por lo que se determinara las impedancias de los elementos y el fasor de la tensión.

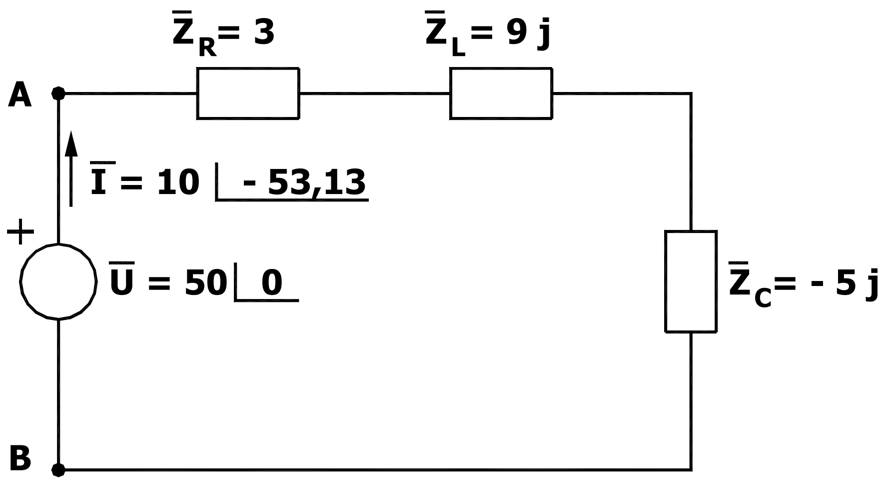
Fasor de tensión: $\bar{U} = 50 \underline{|0}$

Impedancias: $\bar{Z}_R = 3 \underline{|0}$; $\bar{Z}_L = L\omega \underline{|90} = 9 \underline{|90}$

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{C\omega} \underline{|-90} = 5 \underline{|-90}$$

Impedancia equivalente entre A y B: $\bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = 3 + 4\,j = 5 \underline{|53{,}13}$

Fasor de la intensidad: $\bar{I}_{AB} = \dfrac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_{AB}} = \dfrac{50 \underline{|0}}{5 \underline{|53{,}13^{\circ}}} = 10 \underline{|-53{,}13}$



La **intensidad temporal** pedida será: $i(t) = \sqrt{2}\,10 \text{ sen } (100\,t - 53{,}13^{\circ})$

La expresión de la potencia instantánea es:

$$p(t) = P\,(1 + \text{sen } (2\omega t - \pi/2)) - Q \text{ sen } (2\omega t)$$

y como : $P = U\,I \cos(\varphi) = 50 \times 10 \cos(53{,}13^{\circ}) = 300$ W

$Q = U\,I \text{ sen } (\varphi) = 50 \times 10 \text{ sen}(53{,}13^{\circ}) = 400$ Var

$\omega = 100$ rad/s

se tendrá que la **potencia instantánea valdrá**:

$$p(t) = 300\,(1 + \text{sen } (2\pi t - \pi/2)) - 400 \text{ sen } (200\pi t)$$

La **potencia compleja** entre A y B será:

$$\bar{S} = \bar{U}\,\bar{I}^{*} = 50 \,\underline{|\,0} \times 10 \,\underline{|\,53{,}13} = 500 \,\underline{|\,53{,}13} = 300 + 400\,j$$

y por tanto la **potencia aparente** tendrá por valor: **S = 500 VA**

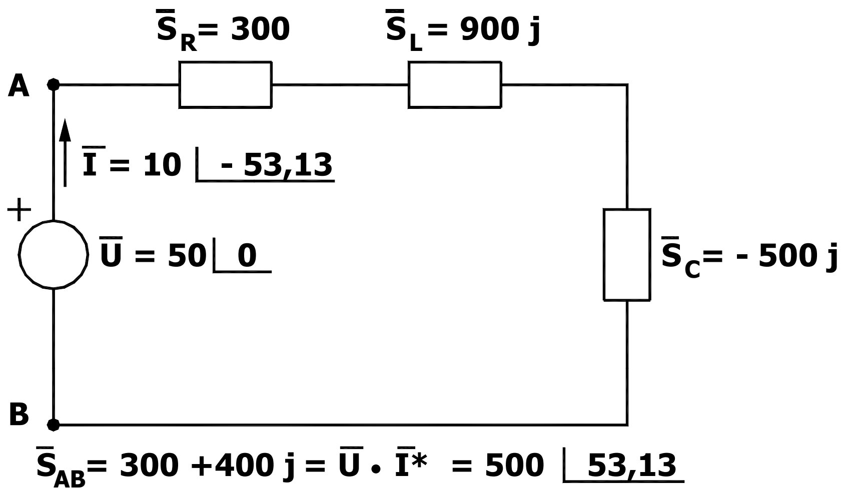
Comprobación: $\bar{S} = P + Q\,j = 300 + 400\,j = R\,I^2 + X\,I^2 = 3 \times 10^2 + 4 \times 10^2\,j$ –> correcto

Otra forma de comprobación: $\bar{S}_R = P + Q\,j = 300 + 0\,j$

$\bar{S}_L = P + Q\,j = 0 + 900\,j$

$\bar{S}_C = P + Q\,j = 0 - 500\,j$

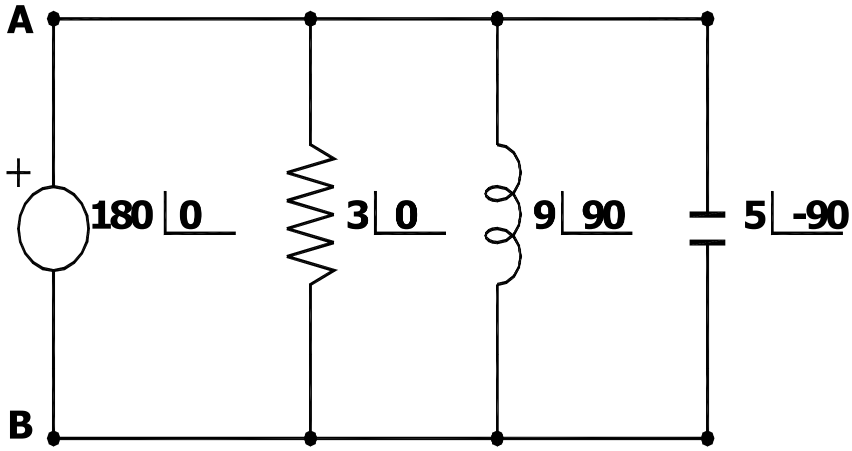
Según boucherot: $\bar{S} = \bar{S}_R + \bar{S}_L + \bar{S}_C = 300 + 400\,j$ –> correcto



Ejemplo: *Dado el circuito de la figura determinar*

1) Factor de potencia entre A y B.

2) Potencia aparente dada por la fuente.



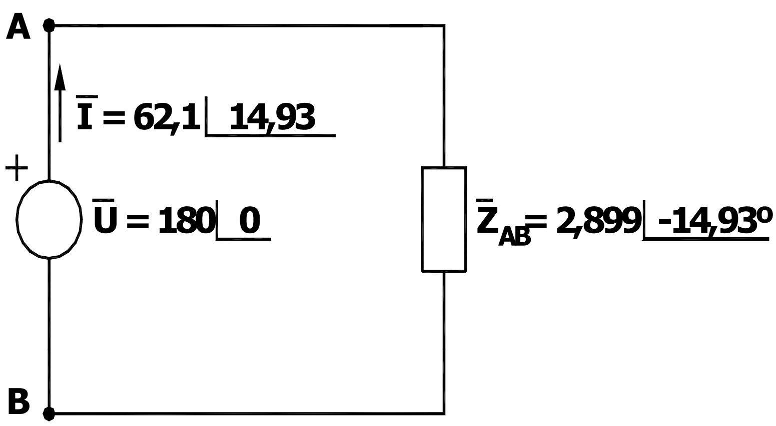
Solución: La impedancia equivalente entre A y B será:

$$\frac{1}{\overline{Z}_{AB}} = \frac{1}{\overline{Z}_R} + \frac{1}{\overline{Z}_L} + \frac{1}{\overline{Z}_C} = \frac{1\,\underline{|0}}{3\,\underline{|0}} + \frac{1\,\underline{|0}}{9\,\underline{|90}} + \frac{1\,\underline{|0}}{5\,\underline{|-90}} = \frac{1}{2{,}899}\,\underline{|14{,}93}$$

$$\overline{Z}_{AB} = 2{,}899\,\underline{|-14{,}93}$$

Y por tanto, el fasor de la intensidad valdrá:

$$\overline{I}_{AB} = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{AB}} = \frac{180\,\underline{|0}}{2{,}899\,\underline{|-14{,}93^{\circ}}} = 62{,}097\,\underline{|14{,}93} = 60 + 16\,j$$



Siendo el factor de potencia el coseno del ángulo que hay entre la tensión y la intensidad, **f.d.p.$_{AB}$ = cos(-14,93º) = 0,966** (Capacitivo) y la potencia aparente el producto del valor de la tensión por la intensidad, **S = U I = 180 × 62,1 = 11177, 4 VA**

Comprobación: Al tratarse de tres elementos pasivos en paralelo se puede calcular el valor de I_{AB} a partir de las intensidades que circulan por cada uno de los elementos:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_R}{\overline{Z}_R} = \frac{180 \angle 0}{3 \angle 0^\circ} = 60 \angle 0 = 60 + 0\,j$$

$$\overline{I}_L = \frac{\overline{U}_L}{\overline{Z}_L} = \frac{180 \angle 0}{9 \angle 90^\circ} = 20 \angle -90 = 0 - 20\,j$$

$$\overline{I}_C = \frac{\overline{U}_C}{\overline{Z}_C} = \frac{180 \angle 0}{5 \angle -90^\circ} = 36 \angle 90 = 0 + 36\,j$$

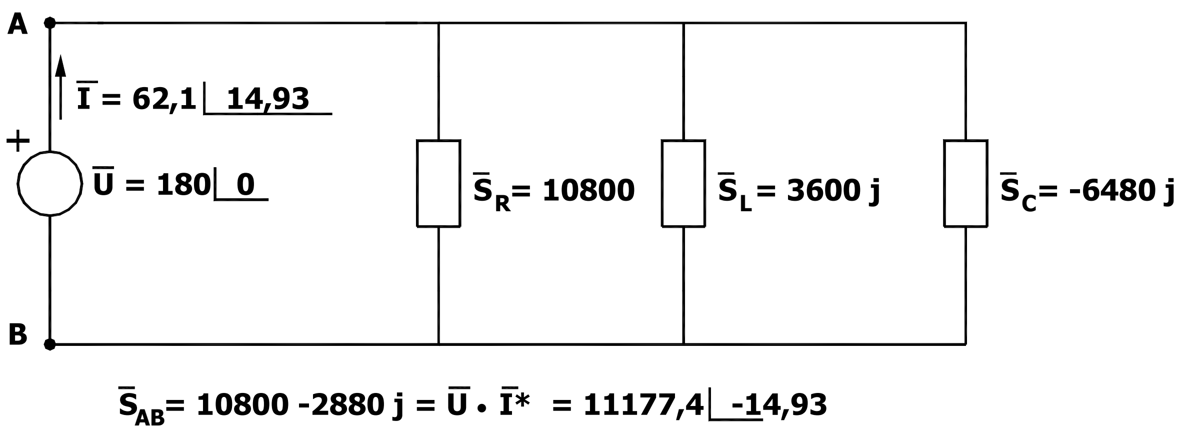
$$\overline{I}_{AB} = \overline{I}_R + \overline{I}_L + \overline{I}_C = 60 + 16\,j = 62{,}097 \angle 14{,}93 \quad \text{–> Correcto}$$

Otra forma de comprobación: Determinando la potencia compleja entre A y B

$$\overline{S}_R = P + Q\,j = U^2/R + 0\,j = 10800 + 0\,j$$
$$\overline{S}_L = P + Q\,j = 0 + U^2/X_L\,j = 0 + 3600\,j$$
$$\overline{S}_C = P + Q\,j = 0 - U^2/X_C\,j = 0 - 6480\,j$$

Según Boucherot: $\overline{S} = \overline{S}_R + \overline{S}_L + \overline{S}_C = 10800 - 2880\,j = 11177{,}406 \angle -14{,}93$

por lo que **S = 11177,4 VA** y **f.d.p.$_{AB}$ = cos(-14,93º) = 0,966** –> Correcto



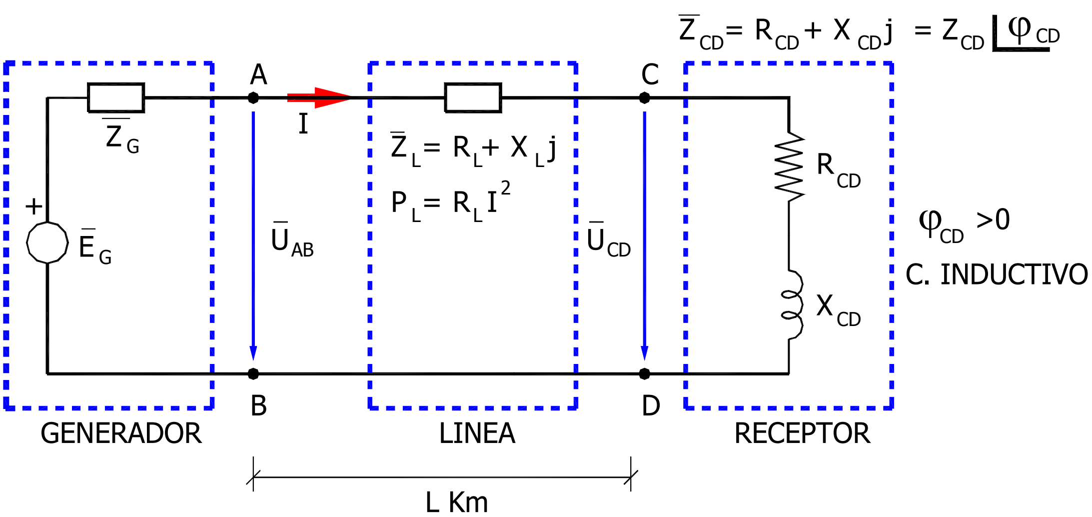
7.5.- CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA

La mayoría de los receptores eléctricos son predominantemente inductivos y, por tanto, la intensidad está retrasada un ángulo φ respecto a la tensión aplicada, por lo que la potencia reactiva de estos es positiva. Un receptor eléctrico o dipolo eléctrico es un centro de consumo (fábrica, taller, explotación agrícola, vivienda, etc.).

Tipos de receptores mas comunes:

Receptores electrotérmicos: Productores de calor	Resistencias calefacción:	$\cos\varphi = 1$
Productores de Luz	Lámparas de incandescencia: Lámparas de descarga:	$\cos\varphi = 1$ $\cos\varphi = 0{,}8$
Motores eléctricos	Potencia mecánica en el eje (CV). Factor de potencia: Rendimiento mecánico: Potencia absorbida por el motor $P = \dfrac{736 \times P_m}{\eta}$ $P = U\,I\cos\varphi = R\,I^2 = Z\cos(\varphi)\,I^2$ $Z = \dfrac{P}{I^2\cos\varphi}$	Pm $\cos\varphi = 0{,}85$ $\eta = 0'9$ P

Al proyectar una instalación, es aconsejable diseñarla con equipos adecuados para que el factor de potencia sea lo más próximo a la unidad, o si la instalación existe, es conveniente intentar corregir el factor de potencia. **La principal razón es la económica**. Supongamos, por ejemplo, un generador diseñado para unos valores de U e I, al que se le conecta un receptor a través de una línea según el esquema de la figura siguiente.



La diferencia de potencial entre los conductores de la linea nos determina el aislamiento de esta y la intensidad que circula por ella nos servirá para calcular la sección de esta linea.

Si se tiene que transferir un potencia determinada desde la fuente (red de distribución) al dipolo pasivo o receptor (centro de consumo) se puede realizar con un factor de potencia (cos φ) pequeño o alto; Ya que el receptor consumirá una potencia aparente (VA) que tiene dos componentes una activa y otra reactiva. Solamente la activa, **P**, es la que aprovecha el receptor para transformarla en la mayoría de los casos en energía térmica o mecánica. Mientras que la potencia inductiva **Q** (Var), representa un bombeo de energía necesaria para el propio funcionamiento del receptor, que no nos da ninguna energía útil y si repercute en aumentar la potencia aparente que tenemos que transportar a través de la linea.

Como sabemos, la potencia a transferir al receptor (ver ilustración anterior) tiene por expresión:

$$\mathbf{P_{CD} = U_{CD}\, I \cos \varphi_{CD}},$$

por lo que la intensidad consumida será: $I = \dfrac{P_{CD}}{U_{CD} \cos \varphi_{CD}}$

Para una misma potencia **P** a transferir y tensión fija, cuanto menor sea **cos φ** mayor resultara el valor de **I**. Este aumento de **I** al disminuir **cos φ** significa que :

- La compañía suministradora tiene su red ineficazmente utilizada y necesita mayor sección de conductor en sus lineas de distribución por su mayor demanda de I para transferir una misma potencia.
- Si la sección esta fijada hay una disminución de la intensidad disponible para otros usuarios ya que se encuentra limitada a un valor máximo definido por las secciones de los conductores de la linea y el generador. Por tanto, el aprovechamiento de las instalaciones generadoras y de transmisión de energía eléctrica depende de los receptores.
- Hay un aumento de perdidas por efecto Joule en los conductores de las líneas y en el generador.

$$\mathbf{P_P = R_G\, I^2 + R_L\, I^2}$$

De todo esto se deriva la necesidad de corregir el factor de potencia (f.d.p.) de un centro de consumo con tendencia a que cos φ =1.

Para compensar a los centros de consumo que tienen una alto factor de potencia las tarifas eléctricas vigentes establecen bonificaciones y recargos en función del factor de potencia, deducido de acuerdo con los consumos de energía activa y reactiva que reflejan los contadores correspondientes al equipo de medida del abonado, intentando de esta forma que los abonados corrijan su factor de potencia de forma que se puedan aprovechar adecuadamente la sección de las lineas de distribución, ya que si se corrige individualmente cada receptor se corrige el f.d.p. del conjunto.

El factor de potencia se determina por la ecuación

$$\cos\varphi = \frac{Wa}{\sqrt{W_a^2 + W_r^2}}$$

siendo: W_a = energía activa consumida en KWh
W_r = energía reactiva consumida en KVArh

Los recargos y bonificaciones se calculan por las siguientes formulas:

$1 \geq \cos\varphi > 0{,}95 \qquad K_r\,(\%) = \dfrac{37{,}026}{\cos^2\varphi} - 41{,}026$

$0{,}95 \geq \cos\varphi > 0{,}9 \qquad K_r(\%) = 0$

$1 \geq \cos\varphi > 0{,}95 \qquad K_r\,(\%) = \dfrac{26{,}16}{\cos^2\varphi} - 36$

con un máximo del 50,7% de recargo

La aplicación de estas ecuaciones, para determinados valores concretos de cos φ, da los recargos y bonificaciones siguientes:

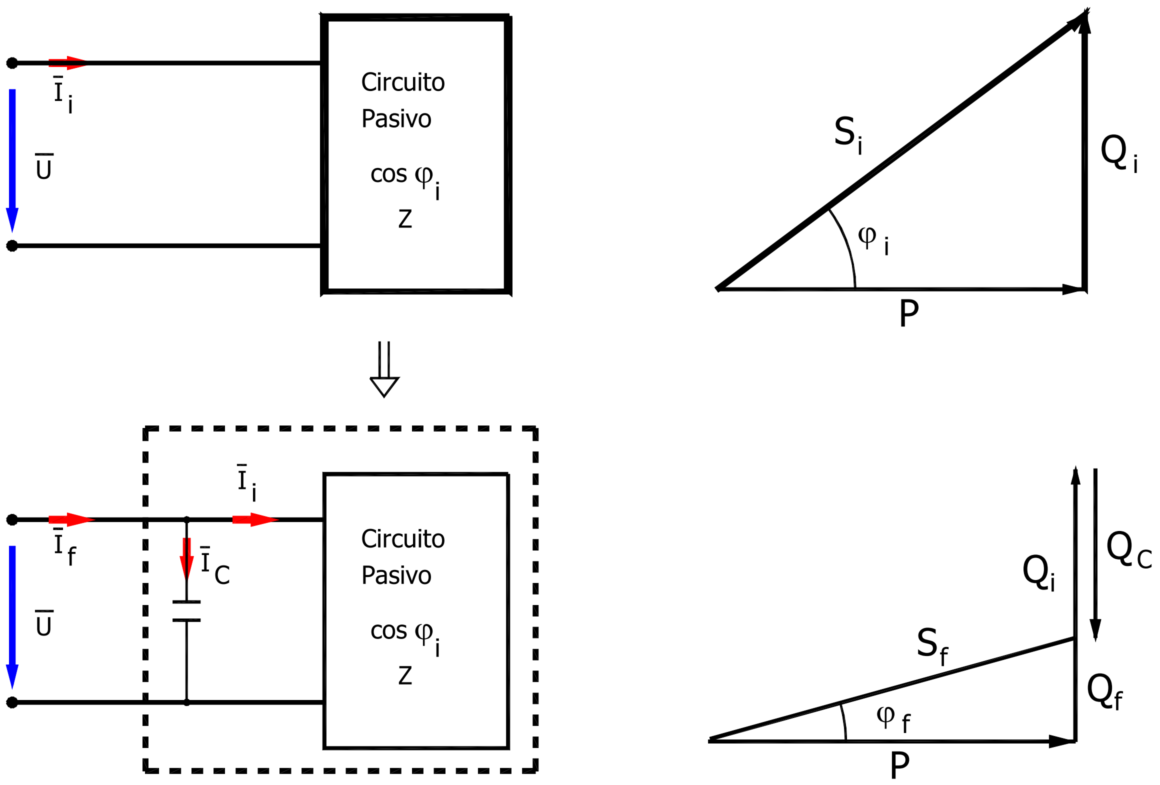
Cos φ	Recargo (%)	Bonificación (%)
1	--------	4 %
0,95	--------	0 %
0,9	0	0 %
0,8	9,6 %	-----------
0,7	23,5 %	
0,6	45 %	-----------
0,58	50,7% %	-----------

Se puede observar en la tabla que una instalación con f.d.p. alto (mayor de 0,95), tendrá bonificación en la factura eléctrica y un f.d.p. bajo (menor de 0,9) tendrá penalización, la cual, por ejemplo, para un f.d.p de 0,58 es del 50,7 % de más que tendrá que pagar el abonado.

Maneras de corregir el factor de potencia

Si tenemos un receptor inductivo, la potencia aparente consumida tendrá una componente activa y otra componente reactiva de carácter inductivo, si queremos que **cos φ** se acerque a la unidad tendremos que intentar anular la componente inductiva con otra componente de semejante valor y signo contrario, o sea una componente reactiva por lo que se pondrá una batería de condensadores en paralelo con el receptor (nunca en serie con la carga pues ocasionaría un aumento de la corriente, efecto que es precisamente el que se trata de evitar).

La potencia reactiva final nunca podrá ser capacitiva, según el REBT-2002.



$Q_i = P \text{ tg } \varphi_i \qquad Q_f = P \text{ tg } \varphi_f$

$$Q_C = Q_i - Q_f = P\,(\text{tg } \varphi_i - \text{tg } \varphi_f) \qquad (1)$$

Por otra parte

$$Q_C = X_C\, I^2_C = U\, I_C = U\,\frac{U}{1/\omega C} = U^2\, \omega\, C \qquad (2)$$

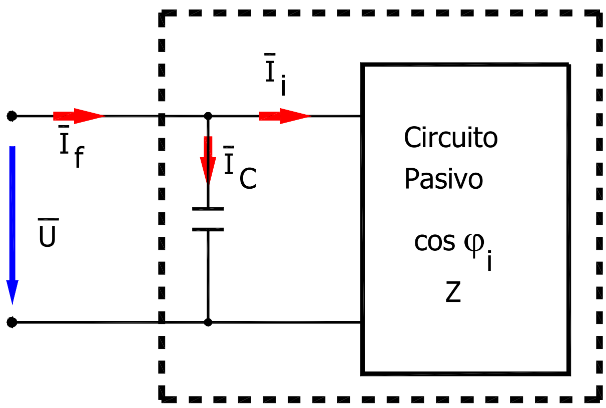
igualando (1) y (2)

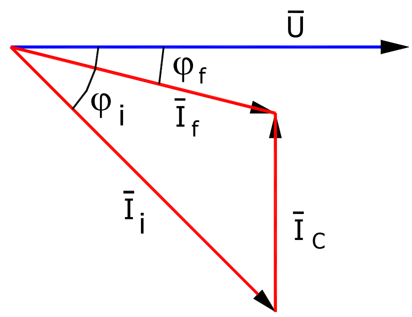
$$U^2 \omega C = P(\operatorname{tg} \varphi_i - \operatorname{tg} \varphi_f)$$

podemos despejar C

$$\boxed{C = \frac{P}{U^2 \omega}(\operatorname{tg} \varphi_i - \operatorname{tg} \varphi_f)} \qquad (3)$$

Otra forma de calcular la capacidad:





$$I_C = I_i \operatorname{sen}(\varphi_i) - I_i \cos(\varphi_i) \operatorname{tg}(\varphi_f)$$

$$\overline{I}_C = j \omega C U \qquad |\overline{I}_C| = \omega C U$$

$$I_i \left(\operatorname{sen}(\varphi_i) - \cos(\varphi_i) \operatorname{tg}(\varphi_f)\right) = \omega C U$$

$$C = \frac{I_i [\operatorname{sen}(\varphi_i) - \cos(\varphi_i) \operatorname{tg}(\varphi_f)]}{\omega U} \qquad (4)$$

En el caso, mucho menos frecuente, de que el desfase a corregir entre u e i se debiera a la presencia de una impedancia capacitiva se procedería de la misma forma a la ya expuesta.

7.6.- MEDIDA DE LA POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA.

En corriente alterna tenemos tres tipos de potencia: Potencia Activa, Reactiva y Aparente. Dependiendo de las necesidades de cada caso será necesario medir una potencia u otra, o las tres.

Para la medida de la Potencia Activa se utiliza un aparato llamado Vatímetro, para la Potencia Aparente bastará con medir la tensión y la intensidad, mientras que la Potencia Reactiva se puede medir directamente con un Varímetro o indirectamente midiendo la Potencia Activa y la Potencia Aparente y efectuando operaciones.

Los aparatos de medida se representan por un circulo en los esquemas eléctricos y dentro de este circulo se sitúa una letra que nos da la magnitud que estamos midiendo.

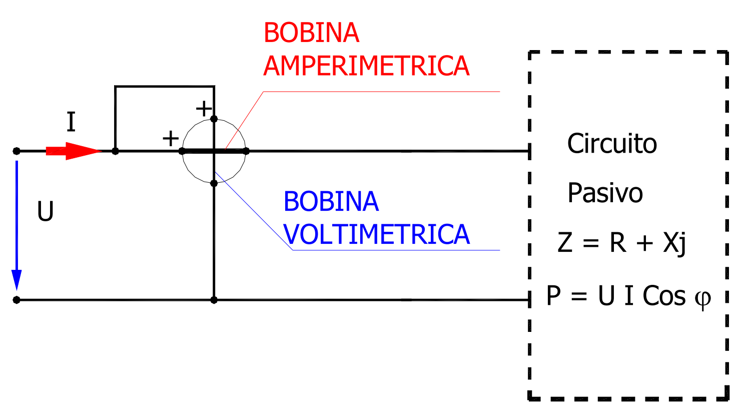
W	VAr	cos φ
Vatímetro	Varmetro	Fasímetro

- *Medida de la potencia activa:*

Los vatímetros más empleados utilizan el sistema de medida electrodinámico, o sea fundados en la mutua acción de dos bobinas recorridas por corriente distinta. Una de las bobinas es de hilo grueso y tiene pocas espiras por lo que la resistencia de esta es muy pequeña y se denomina bobina amperimétrica. La otra bobina tiene un gran número de espiras y se llama bobina voltimétrica.

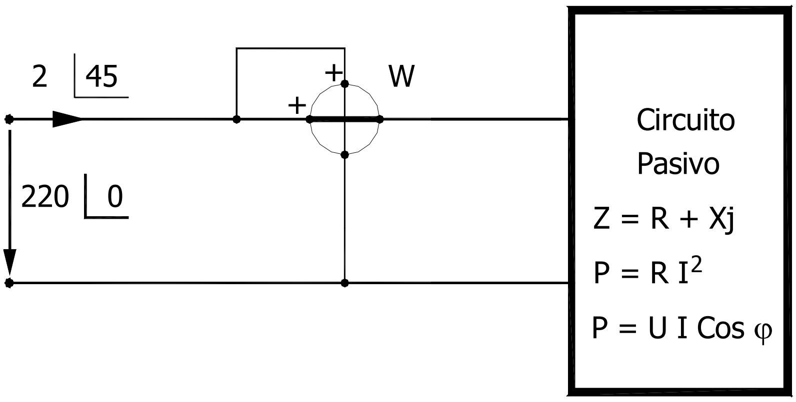
El vatímetro, marca en una escala convenientemente graduada, un valor que corresponde al producto del valor eficaz de la tensión que hay aplicada en los bornes de la bobina voltimétrica por el valor eficaz de la intensidad de la corriente que pasa por la bobina amperimétrica y por el coseno del desfase que hay entre estas dos señales.

$$[\,W\,] = U\,I\cos\varphi$$



Si colocamos el vatímetro como viene reflejado en la figura estamos midiendo directamente la potencia activa **P** consumida por el receptor.

Ejemplo:

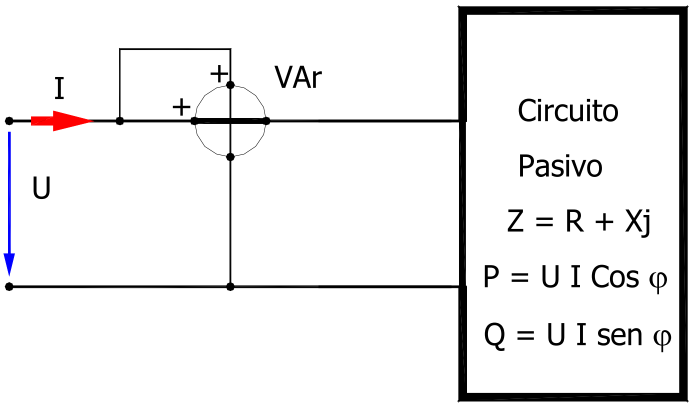


[W] = 220 × 2 × cos (45 - 0) = 311 W.

- *Medida de la potencia reactiva con varímetro:*

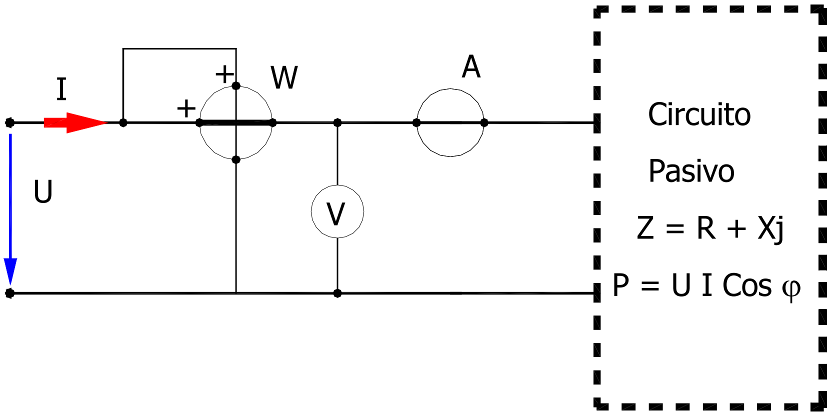
Un varímetro (también conocido como varmetro) es un aparato parecido al vatímetro solo que en la escala graduada marca U I sen φ y si lo montamos como viene reflejado en la figura la lectura de este nos dará la potencia reactiva del receptor:

Q = U I sen φ



- *Medida de potencias con voltímetro, amperímetro y vatímetro:*

El método más sencillo para conocer la potencia Activa, Reactiva y Aparente de un circuito monofásico es utilizar el montaje de la figura:



Las lecturas de cada aparato en este circuito son:

[V] (Voltímetro): Tensión Eficaz (U)

[A] (Amperímetro): Intensidad eficaz (I)

[W] (Vatímetro): Potencia activa ($P = U\, I \cos \varphi$)

Con estos valores se puede calcular la potencia aparente, $S = U\, I$, consumida por el receptor, el factor de potencia, como el cociente entre la lectura del vatímetro y el producto de las lecturas del voltímetro y amperímetro:

$$\cos \varphi = \frac{[\ W\ ]}{[\ A\ ]\,[\ V\ ]}$$

y la potencia reactiva mediante la expresión:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = S \operatorname{sen} \varphi$$

PROBLEMA

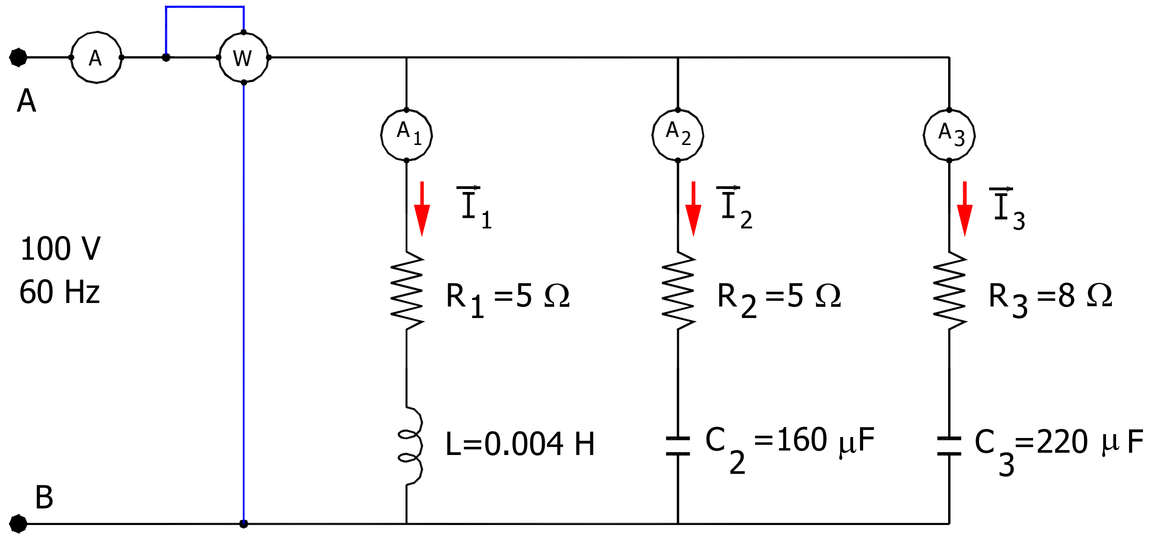
Dado el circuito eléctrico de la figura, alimentado a una tensión de 100 V y 60 Hz. Calcular:

1.- Indicaciones de los aparatos de medida conectados al circuito.

2.- Las características de las impedancias equivalente al circuito.

3.- Potencia reactiva y aparente total.

4.- Capacidad de la batería de condensadores, que mejora el factor de potencia de la instalación hasta la Unidad.



Solución:

1.- Vamos a calcular, en primer lugar, la impedancia de cada rama.

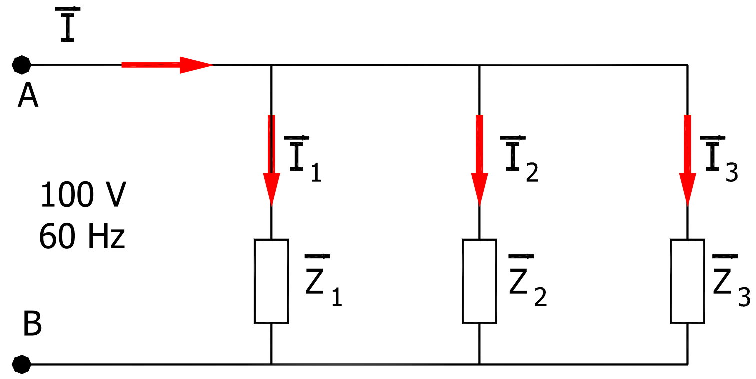
$$\overline{Z}_1 = R_1 + L\,\omega\,j = 5 + 0,04 \times 120\pi\,j = 5 + 15,08\,j = 15,88\ \underline{|\,71,65}\ \Omega$$

$$\overline{Z}_2 = R_2 - \frac{1}{C\omega}\,j = 5 - \frac{1}{160 \times 10^{-6} \times 120\pi}\,j = 5 - 16,61\,j = 17,34\ \underline{|\,-73,24}\ \Omega$$

$$\overline{Z}_3 = R_3 - \frac{1}{C\omega}\,j = 8 - \frac{1}{220 \times 10^{-6} \times 120\pi}\,j = 8 - 12,05\,j = 14,46\ \underline{|\,-56,42}\ \Omega$$

Tomamos como origen de fases el vector $\overline{U}_{AB} = 100\underline{|\,0}$

$$\overline{I}_1 = \frac{100\angle 0}{15{,}88\angle 71{,}65} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_1} = 6{,}297\angle -71{,}65 \text{ A}$$



y el amperímetro indica: A_1= 6,297 A.

$$\overline{I}_2 = \frac{100\angle 0}{17{,}34\angle -73{,}24} = 5{,}77\angle 73{,}24 \qquad A_2 = 5{,}77 \text{ A.}$$

$$\overline{I}_3 = \frac{100\angle 0}{14{,}46\angle -56{,}42} = 6{,}92\angle 56{,}42 \qquad A_3 = 6{,}42 \text{ A.}$$

Aplicando el primer lema de Kirchhoff: $\overline{I}_T = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3$

$$\overline{I}_T = 6{,}297\angle -71{,}65 + 5{,}77\angle 73{,}24 + 6{,}92\angle 56{,}42 = 9{,}17\angle 35{,}41 \text{ A.}$$

El circuito equivalente entre A y B es capacitivo.

El amperímetro A indica: **A= 9,17 A.**

Se puede observar que:

$$A \neq A_1 + A_2 + A_3 \qquad |\overline{I}_T| \neq |\overline{I}_1| + |\overline{I}_2| + |\overline{I}_3|$$

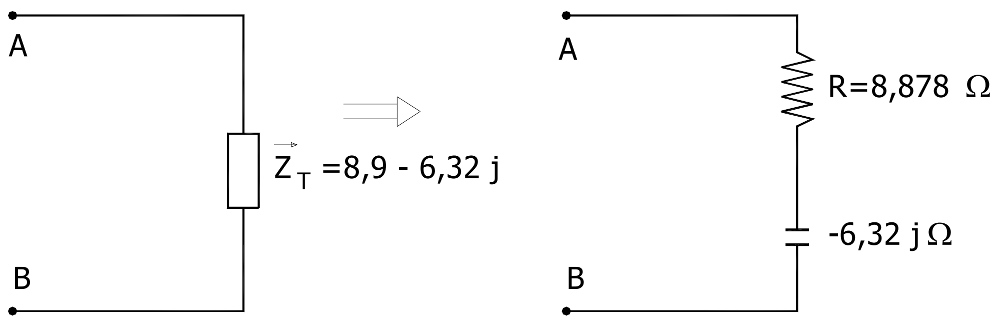
El vatímetro marcará: W= U I cos φ = 100 × 9,17 cos (- 35,41) =

= 100 × 9,17 × 0,81 = 747,38 W

2.- La impedancia equivalente del circuito será:

$$\overline{Z}_T = \frac{\overline{U}}{\overline{I}_T} = \frac{100 \angle 0}{9{,}17 \angle 35{,}41} = 10{,}905 \angle -35{,}41 = 8{,}878 - 6{,}32\,j$$

Tenemos una resistencia de 8,9 Ω en serie con una reactancia capacitiva de 6,32 Ω.



Otra forma de hallar la impedancia total:

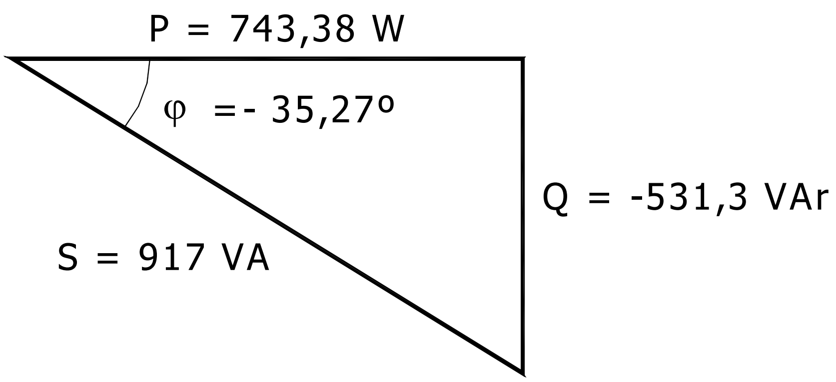
$$\frac{1}{\overline{Z}eq} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} + \frac{1}{\overline{Z}_3} \qquad \overline{Z}_{eq} = 10{,}91 \angle -35{,}41 \text{ igual que antes.}$$

3.- Potencia activa: P = U I cos φ = 100 × 9,17 cos (- 35,41) = 747,38 W.

Potencia reactiva: Q = U I sen φ = 100 × 9,17 sen (- 35,41) = - 531,33 VAr.

Potencia aparente: $\overline{S} = 747{,}38 - 531{,}33\,j = P + Q\,j$

$$S = \sqrt{747{,}38^2 + 531{,}33^2} = 917 \text{ VA.}$$



Como comprobación:

$P = R\,I^2 = 8{,}9 \times 9{,}17^2 = 747{,}38$ W.

$Q = X\,I^2 = 6{,}3 \times 9{,}17^2 = 531{,}4$ VAr.

$S = U\,I = 100 \times 9{,}17 = 917$ VA.

o también: $\overline{S}_T = \overline{U}\ \overline{I}^{\,*} = 100\underline{|\,-0} \times 9{,}17 = 917\underline{|\,-35{,}41} = 747{,}38 + 531{,}4\,j$

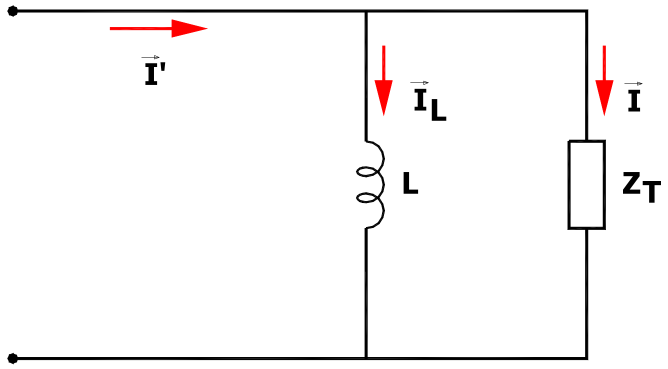
4.- Puesto que el circuito ya es capacitivo, no se puede mejorar el factor de potencia colocando un condensador, por el contrario habría que poner una bobina o grupo de bobinas en paralelo.

Del triangulo de potencias:

$$Q = \frac{U^2}{L\omega} = P\,(\text{tg}\,\varphi - \text{tg}\varphi') = \frac{100^2}{120\,\pi\,L} = 747{,}38\,(\text{tg}\,(-35{,}41) - \text{tg}\,0)$$

Y por tanto

$L = 0{,}05$ H.



PROBLEMA

Dada la impedancia: $\overline{Z}_1 = 3 + 4j$, *de la figura, alimentada a tensión alterna U = 100 V y f = 50 Hz, estudiar diferentes maneras de corregir su factor de potencia hasta alcanzar cos* $\varphi_T = 0,8$ *, haciendo algún comentario sobre sus distintas características.*

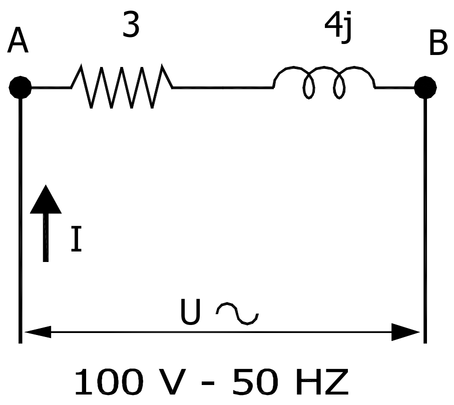


Figura 1

SOLUCIÓN

a) ***Capacidad en PARALELO.***

La impedancia compleja equivalente entre A y B de la figura nº 2 será: $\dfrac{1}{\overline{Z}_{AB}} = \dfrac{1}{\overline{Z}_1} + \dfrac{1}{\overline{Z}_2}$

y sabiendo que la admitancia compleja es la inversa de la impedancia compleja: $\overline{Y} = 1/\overline{Z}$

Tendremos que la admitancia compleja del conjunto Z_1 mas la impedancia de la capacidad buscada será:

$$\overline{Y}_T = \overline{Y}_{AB} = \frac{1}{3+4j} + j\,\omega\,C = \frac{3-4j}{25} + j\,\omega\,C = \frac{3 + j(25\,\omega\,C - 4)}{25}.$$

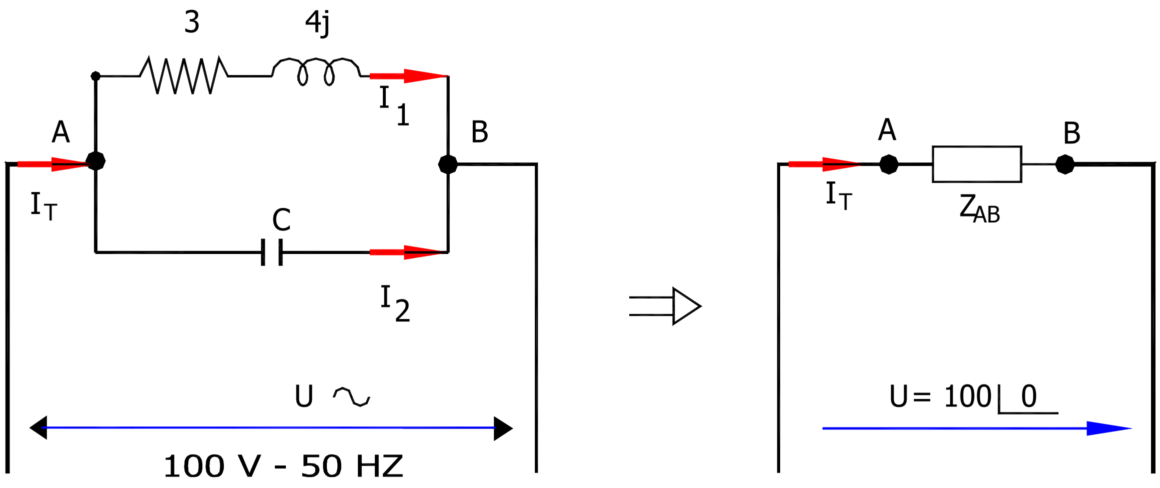


Figura 2.

El argumento de la impedancia compleja total nos da el desfase entre la tensión y la intensidad, por lo que si $\text{Cos}(\varphi_T)$ debe ser 0,8 se deberá cumplir que $\text{Tg}(\varphi_T) = -3/4$ y por tanto habrá de verificarse que:

$$-\frac{3}{4} = \frac{25\,\omega\,C - 4}{3} \qquad \text{o sea:} \qquad 100\,\omega\,C = 7 \quad \text{de donde:}$$

$$C = \frac{7}{100\,\omega} = \frac{7}{10.000\,\pi} = 0{,}000222816\,F = 222{,}816\ \mu F$$

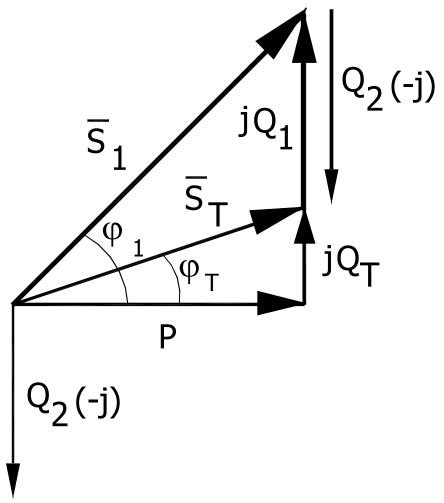
Los valores de las intensidades de las corrientes son ahora:

$$\bar{I}_1 = \bar{U}\,\bar{Y}_1 = 100 \times \frac{3-4j}{25} = 4(3-4j) = 20\underline{|-50{,}18^o} \qquad \text{con lo que } I_1 = 20\ A.$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_C = j\,\omega\,C\,\bar{U} = j\,\frac{7}{100} \times 100 = 7j = 7\underline{|90^o} \qquad \text{con lo que } I_C = 7\ A.$$

$$\bar{I}_T = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 12 - 16j + 7j = 3(4-3j) = 15\underline{|-36{,}87^o} \qquad \text{e } \ I_T = 15\ A.$$

El diagrama de intensidades correspondiente se puede ver en la figura inferior.



Triangulo de potencias

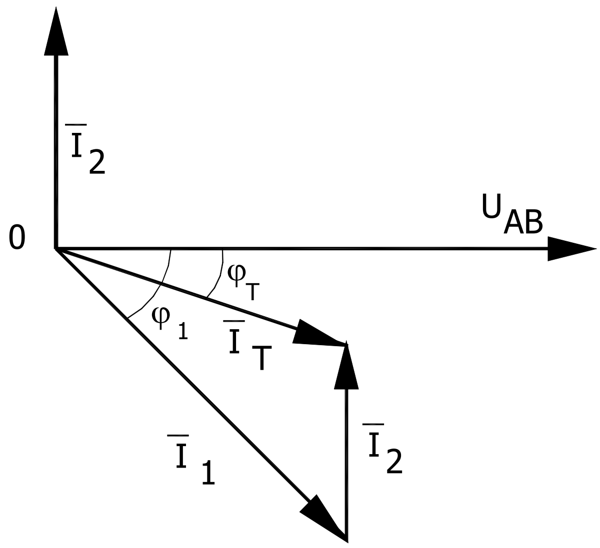


Diagrama de tensiones e intensidades

Se podría haber procedido a base de la potencia absorbida por la impedancia dada.

$$P = I_1^2\,R = 20^2 \times 3 = 1.200\ W.$$

y entonces:

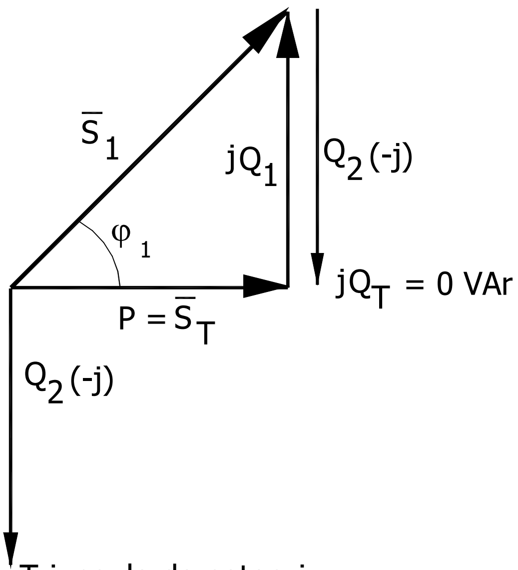
$$C = \frac{P(\mathrm{tg}\,\varphi_1 - \mathrm{tg}\,\varphi_2)}{\omega\,U^2} = \frac{1.200\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right)}{100\,\pi \times 10^4} = \frac{7}{10^4\,\pi} = 0{,}000222816\ F.$$

Como puede observarse la corrección del factor de potencia mediante una capacidad en paralelo:

- No modifica la tensión en bornes de la impedancia (U_{AB} = 100 V).
- No aumenta el consumo de energía.

- La intensidad de la corriente que ha de proporcionar la fuente de tensión disminuye (pasa de 20 a 15 A).
- Eventualmente se puede conseguir que $\varphi_T = 0$ (corrección total del factor de potencia). En tal caso, la intensidad de la corriente suministrada por la fuente de tensión sería la más pequeña posible, es decir:

$$I_{MIN} = 100 \times \frac{3}{25} = 12 \text{ A}.$$



Triangulo de potencias

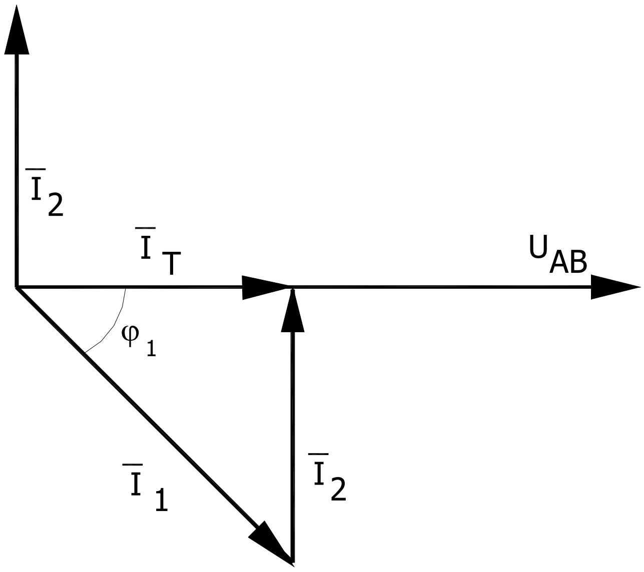


Diagrama de tensiones e intensidades

b) ***Resistencia en PARALELO.***

En este caso la admitancia entre A y B del conjunto formado por la impedancia dada y la resistencia R (ver figura siguiente) sería:

$$\overline{Y}_T = \overline{Y}_{AB} = \frac{1}{3+4j} + \frac{1}{R} = \frac{3-4j}{25} + \frac{1}{R} = \frac{3R+25-4j\,R}{25R}.$$

En consecuencia:

$$\text{tg}\,\varphi_T = -\frac{3}{4} = -\frac{4R}{3R+25}$$

o sea: $9\,R + 75 = 16\,R$ de donde: $R = \frac{75}{7} = 10{,}71\ \Omega$

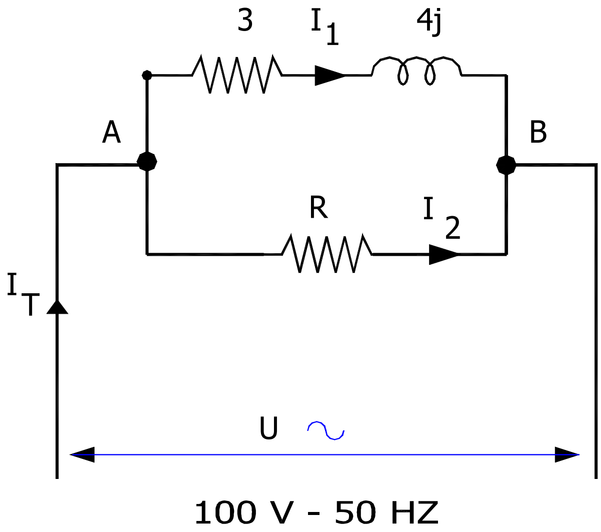
Las intensidades de las corrientes de rama y total serán ahora:

$$\overline{I}_1 = \overline{U}\,\overline{Y}_1 = 100 \times \frac{1}{3+4j} = 4\,(3-4j) = 20\ \underline{|-53{,}13^o} \qquad \text{e} \quad I_1 = 20\ \text{A}\ .$$

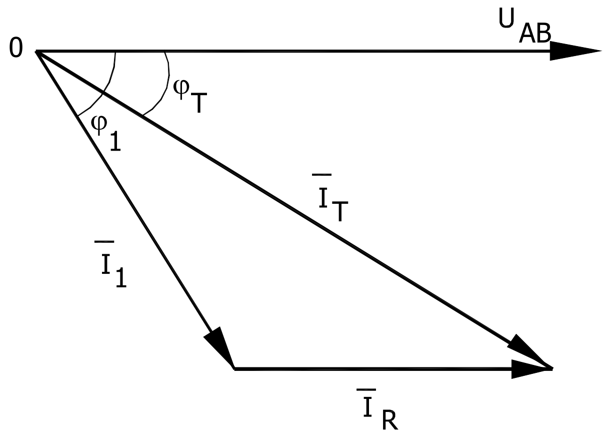
$$\overline{I}_2 = \overline{I}_R = 100 \times \frac{1}{\frac{75}{7}} = \frac{28}{3}\ \underline{|0^o} \qquad \text{e} \qquad I_R = \frac{28}{3} = 9{,}33\ \text{A.}$$

$$\overline{I}_T = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = 12 - 16j + \frac{28}{3} = \frac{64-48j}{3} = \frac{16\,(4-3j)}{3} = \frac{80}{3}\ \underline{|-36{,}87^o}$$

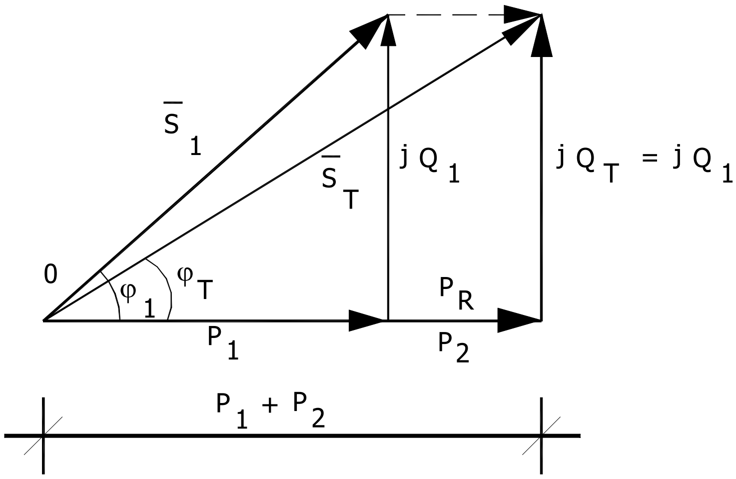
Con lo cual: $I_T = \frac{80}{3} = 26{,}67$ A.



El diagrama de intensidades se representa en la figura siguiente:



A base del empleo de potencias absorbidas se tendría:



$P_1 = I^2_1\, R_1 = 40 \times 3 = 1.200$ W.

$Q_1 = P_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \quad$ y $\quad Q_2 = 0$

con lo que: $\qquad (P_1 + P_2) \operatorname{tg} \varphi_2 = P_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \qquad$ y por tanto:

$$P_2 = P_R = P_1 \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_2} = 1.200 \times \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2.800}{3} \text{ W}$$

Como: $R = U^2 / P_R$ se verificará: $R = \dfrac{100^2}{\frac{2.800}{3}} = \dfrac{300}{28} = \dfrac{75}{3} = 10{,}71\ \Omega$ coincidiendo con

el valor antes calculado.

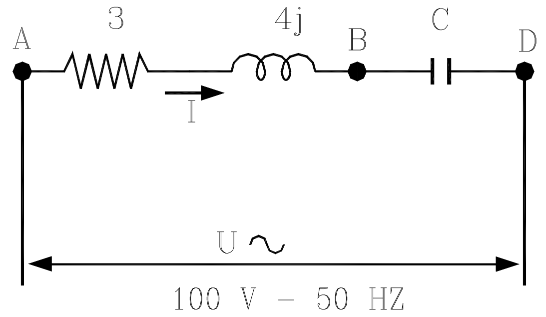
- Con este tipo de corrección del factor de potencia no varía la tensión U_{AB} en los bornes de la impedancia ($U_{AB} = 100$ V).
- Hay consumo de energía en el elemento corrector. En el caso presente:

$$\frac{P_R}{P_1} = \frac{\frac{2.800}{3}}{1.200} = \frac{7}{9} = 0{,}777$$

- Aumenta la intensidad de la corriente proporcionada por la fuente. Pasa en este supuesto de 20 a 26,67 A.
- Mediante resistencias conectadas en paralelo a una carga dada, no puede llegarse a obtener corrección total ($\varphi_T = 0$).

c) ***Capacidad en SERIE***.

La impedancia total del nuevo elemento constituido al conectar a la impedancia dada una capacidad C en serie con ella (figura siguiente) es la siguiente:



$$\overline{Z}_{AD} = \overline{Z}_T = 3 + 4j - \frac{j}{\omega C} = 3 + j\left(4 - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Para que se verifique que: tg $\varphi_2 = 3/4$ se habrá de verificar:

$$\frac{3}{4} = \frac{4 - \dfrac{1}{\omega C}}{3}$$

o sea: $9 = 16 - \dfrac{4}{\omega C}$ de donde: $\omega C = \dfrac{4}{7}$ y por tanto:

$$C = \frac{4}{7\,\omega} = \frac{4}{700\,\pi} = 0{,}0018189 \text{ F} = 1.818{,}91\ \mu\text{F}$$

El valor de la intensidad en la corriente será ahora:

$$\bar{I}' = \frac{100}{3 + 4j - j\dfrac{7}{4}} = \frac{400}{12 + 9j} = \frac{400\,(12 - 9j)}{225} = \frac{16}{3}(4 - 3j) = \frac{80}{3}\underline{\left|\ -36{,}87^{o}\right.}$$

Siendo, por tanto I’ = 26,67 A.

La tensión en los bornes de la carga $\overline{U}_{AB}$ será:

$$\overline{U}_{AB} = \overline{I}'\,\overline{Z}_{AB} = \frac{16}{3}(4 - 3j)(3 + 4j) = \frac{16}{3}(24 + 7j) = \frac{400}{3}\underline{\left|\ 16{,}26^{o}\right.}$$

con lo que $U_{AB} = 133{,}33$ V.

La tensión en los bornes del condensador $\overline{U}_{BD}$ será:

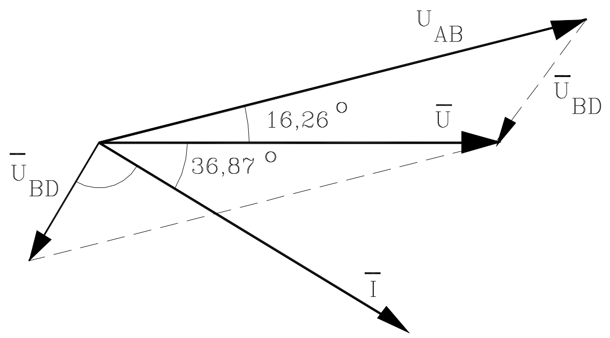
$$\overline{U}_{BD} = -j\,\frac{\overline{I}}{\omega C} = -j\,\frac{7}{4} \times \frac{16}{3}(4-3j) = -\frac{28}{3}(3+4j) = \frac{140}{3}\,\underline{|\,-126{,}87^{o}}$$

y por tanto $U_{BD} = 46{,}67$ V. Como comprobación:

$$\overline{U}_{AB} + \overline{U}_{BD} = \frac{16}{3}(24-7j) - \frac{28}{3}(3+4j) = \frac{1}{3}(384+112j-84-112j) = 100\,\underline{|\,0^{o}}$$

$U_{AD} = 100$ V.

El diagrama de tensiones e intensidades para este caso se representa en la figura nº 9:



La potencia absorbida por la carga (3 + 4 j) será:

$$P = I'^{\,2} R = \left(\frac{80}{3}\right)^2 \times 3 = \frac{6.400}{3} = 2.133{,}3 \text{ W}$$

en tanto que la potencia absorbida sin la conexión del condensador será: $P = 20^2 \times 3 = 1200$ W

Como consecuencia de los resultados obtenidos se puede observar:

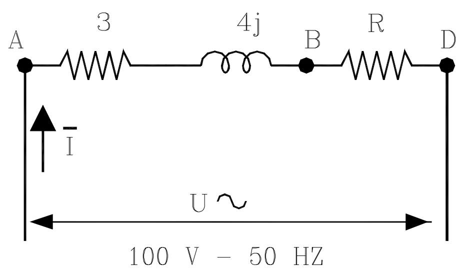
- Al disminuir el módulo de $\overline{Z}_T = \overline{Z}_{AD}$ aumenta el valor de $I = \dfrac{U}{Z_T}$.

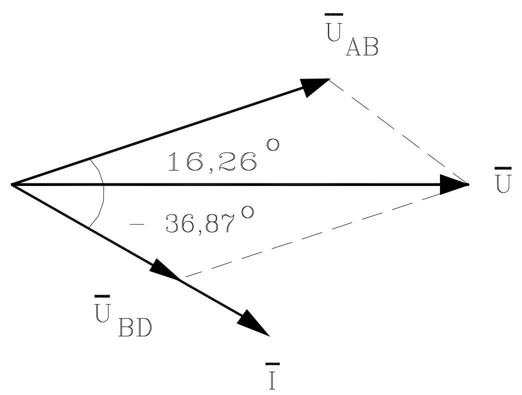
  En este caso la intensidad de la corriente en la carga pasa de 20 a 26,67 A.
- El valor de la capacidad es mayor que la correspondiente al apartado a).

- La potencia absorbida por la carga aumenta como consecuencia del incremento de la intensidad de la corriente. En el supuesto considerado se produce una diferencia de 433,33 W.
- No hay consumo de energía en el elemento corrector.
- Puede alcanzarse $\varphi_T = 0$. En este caso la intensidad de la corriente en la carga sería la mayor posible: $I_{MAX} = 100/3 = 33{,}3$ A

d) ***Resistencia en SERIE.***

La impedancia total del conjunto (figura siguiente) de la carga inicial $\left(\overline{Z}_{AB} = 3 + 4j\right)$ y de la resistencia R utilizada como elemento corrector del factor de potencia de la carga será:





$\overline{Z}_1 = \overline{Z}_{AD} = 3 + 4j + R$

El ángulo φ_T de la carga corregida será tal que: $\operatorname{tg} \varphi_2 = \dfrac{4}{3 + R} = \dfrac{3}{4}$

En consecuencia: $16 = 9 + 3R$ y $R = \dfrac{7}{3}\ \Omega = 2{,}33\ \Omega$.

La intensidad de la corriente que recorre la carga valdrá:

$$\overline{I}' = \frac{100}{\overline{Z}_1} = \frac{100}{3 + 4j + \frac{7}{3}} = \frac{100}{\frac{16}{3} + 4j} = \frac{300}{16 + 12j} = 3(4 - 3j) = 15 \underline{\left|\, -36{,}87^{\circ}\right.}$$

I’ = 15 A.

La tensión en bornes de la carga $\overline{U}_{AB}$ tendrá por valor:

$$\overline{U}_{AB} = \overline{I}'\,\overline{Z}_{AB} = 3(4 - 3j)(3 + 4j) = 3(24 + 7j) = 75 \underline{\left|\, 16{,}26^{\circ}\right.} \quad \text{y} \quad U_{AB} = 75 \text{ V}.$$

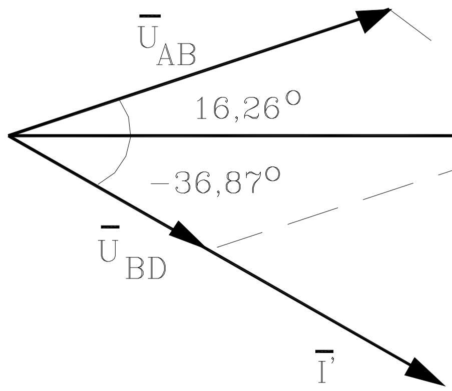
La tensión en los bornes de la resistencia utilizada como correctora del factor de potencia será:

$$\overline{U}_{BD} = \overline{I}' \, \overline{Z}_{BD} = 3(4 - 3j)\left(\frac{7}{3}\right) = 7(4 - 3j) = 35 \underline{|-36{,}87^o} \quad \text{y } U_{BD} = 35 \text{ V.}$$

Como comprobación:

$$\overline{U}_{AB} + \overline{U}_{BD} = 3(24 + 7j) + 7(4 - 3j) = 72 + 21j + 28 - 21j = 100 \underline{|0^o}$$

El diagrama de corrientes y de tensiones correspondiente a este supuesto puede verse en la figura siguiente:



La potencia absorbida por la carga valdrá: $P_1 = I'^2 R_1 = 15^2 \times 3 = 675$ W

La potencia absorbida por la resistencia correctora del factor de potencia será por su parte: $P_R = 15^2 \times 7/3 = 525$ W, ello equivale a que se invertiría: 525/675 ×100 = 77,7 % de la potencia útil en la corrección hasta 0,8 del factor de potencia de la carga.

- Como consecuencia del aumento de $Z_1 = Z_{AB}$ (de 5 a 6,67 Ω) la intensidad de la corriente disminuye (de 20 pasa a 15 A).
- La tensión en bornes de la carga ($\overline{U}_{AB} = \overline{I}' \, \overline{Z}_{AB}$) disminuye por efecto de la disminución de la intensidad de la corriente.
- La potencia absorbida por la carga disminuye asimismo pasando de 1.200 a 675 W.
- La corrección del factor de potencia no sería económica con este método ya que, como se ha visto, se invertiría el 77,7 % de la potencia útil en la indicada mejora del cos φ de la carga.
- No puede llegarse en ningún caso a la corrección total (cos $\varphi_T = 1$).