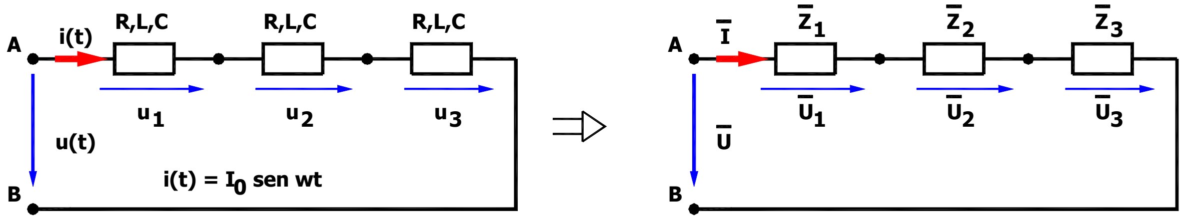
6.5.3.- RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS CON IMPEDANCIAS EN SERIE

Supongamos un circuito con tres elementos pasivos en serie, al cual le aplicamos una intensidad alterna senoidal, vamos a calcular la tensión en los bornes del circuito y en bornes de cada elemento por medio del método simbólico.



Lo primero que se tiene que hacer es calcular la impedancia compleja de cada elemento y el fasor correspondiente a la intensidad:

Impedancia de los elementos: $\overline{Z}_1 = R_1 + X_1 j = Z_1 \underline{|\ \varphi_1}$

$$\overline{Z}_2 = R_2 + X_2 j = Z_2 \underline{|\ \varphi_2}$$

$$\overline{Z}_3 = R_3 + X_3 j = Z_3 \underline{|\ \varphi_3}$$

Fasor de la intensidad: $\overline{I} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}} \underline{|\ 0^o} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}} e^{0j}$

Si aplicamos la segunda ley de Kirchoff al circuito, entre **A** y **B**, $\mathbf{u = u_1 + u_2 + u_3}$, como se ha comprobado que el fasor correspondiente a la onda **u** se puede determinar por la suma de los tres fasores correspondiente a las ondas de tensión, se puede aplicar el 2º lema con fasores:

$$\overline{U} = \overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3$$

En este tema se ha visto que el fasor de tensión $\overline{U}$ se puede determinar a partir de $\overline{I}$ y $\overline{Z}$ por la expresión $\overline{U} = \overline{I}\,\overline{Z}$, por lo que sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 = \bar{I}\,\bar{Z}_1 + \bar{I}\,\bar{Z}_2 + \bar{I}\,\bar{Z}_3 =$$

$$= \bar{I}\,(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) = \bar{I}\,\bar{Z}_{eq}$$

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = Z_{eq} \,\underline{|\varphi}$$

$$\bar{U} = \bar{Z}_{eq}\,\bar{I} = |\bar{Z}_{eq}|\;|\bar{I}|\,\underline{|\,\varphi}$$

$$u = \sqrt{2}\,|\bar{Z}_{eq}|\;|\,\bar{I}\,|\;\text{sen}\;(\omega t + \varphi) \quad \text{Dominio de los tiempos}$$

con lo que, **en un circuito serie, la impedancia compleja equivalente es la suma de cada una de las impedancias de sus elementos**.

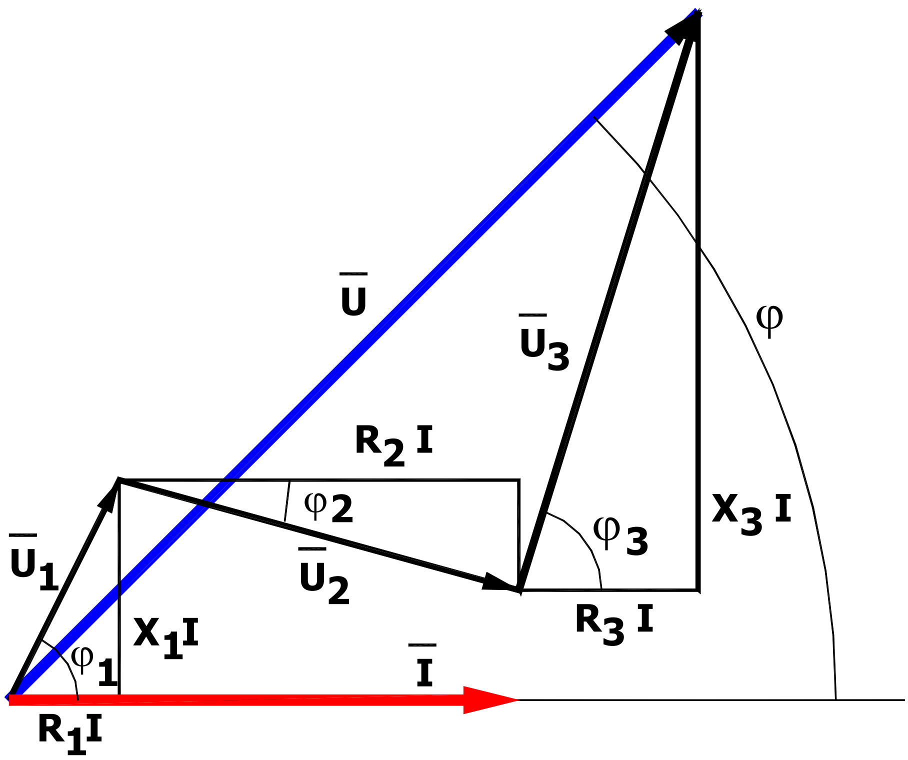


Diagrama fasorial del circuito serie

A toda operación entre números complejos corresponde otra entre sus vectores asociados. Por consiguiente, los circuitos se pueden estudiar también mediante operaciones con vectores. Para representar los fasores, en la agrupación serie, se sitúa el fasor I en el origen de las fases.

Este procedimiento gráfico ofrece la ventaja, respecto al procedimiento algebraico, de que las relaciones de fase y amplitud entre todas las tensiones e intensidades quedan expuestas de una forma muy clara e inmediata. En el diagrama que hemos considerado (el diagrama vectorial de arriba) se puede apreciar que Z_1 y Z_3 son impedancias inductivas y Z_2 capacitiva. El circuito globalmente es inductivo.

Resumen: Impedancias parciales:

$$\bar{Z}_1 = R_1 + X_1 j = Z_1 \underline{|\varphi_1}$$

$$\bar{Z}_2 = R_2 + X_2 j = Z_2 \underline{|\varphi_2}$$

$$\bar{Z}_3 = R_3 + X_3 j = Z_3 \underline{|\varphi_3}$$

Impedancia total o equivalente: $\Sigma \bar{Z} = \bar{Z}_{eq} = \Sigma R_i + j \Sigma X_i$

Respuesta global: $\bar{U} = \bar{Z}_{eq} \bar{I} = |\bar{Z}_{eq}|\ |\bar{I}|\ \underline{|\varphi}$

$$u = \sqrt{2}\ |\bar{Z}_{eq}|\ |\bar{I}|\ \text{sen}\ (\omega t + \varphi)$$

$$Z_{eq} = \sqrt{(\Sigma R_i)^2 + (\Sigma X_i)^2}$$

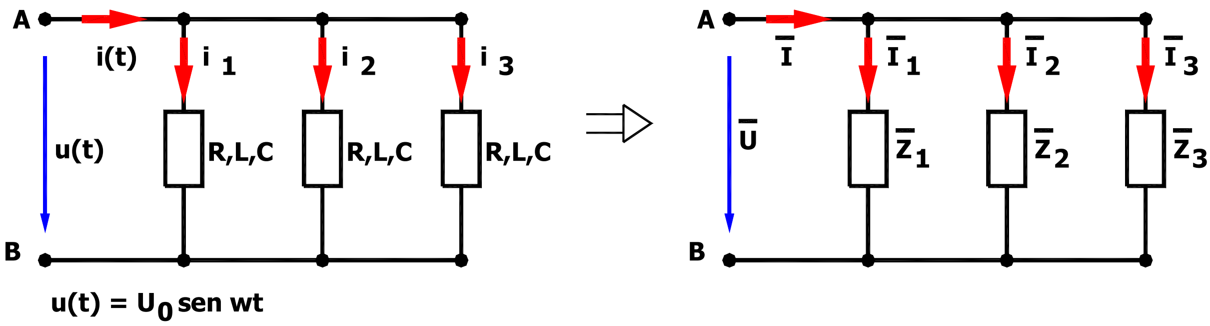
$$\varphi = \text{artg}\ \frac{\Sigma X_i}{\Sigma R_i}$$

Respuestas parciales a la excitación $i = I_0$ sen ωt cuyo fasor es: $\bar{I} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \underline{|0}$

Fasor	Respuesta temporal
$\bar{U}_1 = Z_1 \underline{\|\varphi_1} \cdot I \underline{\|0} = U_1 \underline{\|\varphi_1}$	$u_1 = \sqrt{2}\ \|Z_1\|\ \|I\|$ sen $(\omega t + \varphi_1)$
$\bar{U}_2 = Z_2 \underline{\|-\varphi_2} \cdot I \underline{\|0} = U_2 \underline{\|-\varphi_2})$	$u_2 = \sqrt{2}\ \|Z_2\|\ \|I\|$ sen $(\omega t - \varphi_2)$
$\bar{U}_3 = Z_3 \underline{\|\varphi_3} \cdot I \underline{\|0} = U_3 \underline{\|\varphi_3}$	$u_3 = \sqrt{2}\ \|Z_3\|\ \|I\|$ sen $(\omega t + \varphi_3)$

6.5.4.- RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS CON IMPEDANCIAS EN PARALELO

Supongamos un circuito con tres elementos pasivos en paralelo, al cual le aplicamos una tensión alterna senoidal, vamos a calcular la intensidad que circula por cada elemento y la intensidad total demandada de la red por medio del método simbólico



Sea la excitación $u = U_0 \text{ sen } \omega t$, que en forma fasorial será: $\overline{U} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}} \underline{|\,0^0}$

determinanos las impedancias de los elementos, Z_1, Z_2 y Z_3 y aplicando el primer lema al nudo A con fasores, la respuesta será el fasor de la intensidad $\overline{I}$

$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_1} + \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_2} + \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_3} = \overline{U} \left(\frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} + \frac{1}{\overline{Z}_3}\right) = \overline{U}\,(\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3)$$

$$\overline{Y}_{eq} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3$$

por lo tanto

$$\overline{Y}_{eq} = \Sigma\, G_i + j\, \Sigma\, B_i$$

En un circuito paralelo **la admitancia compleja equivalente es la suma de todas las admitancias complejas de cada uno de los elementos**.

En el diagrama vectorial de los fasores tensiones e intensidades de la figura siguiente se puede ver gráficamente las operaciones realizadas anteriormente. Se han considerado para este diagrama las impedancias Z_1 y Z_3 inductivas y la impedancia Z_2 capacitiva.

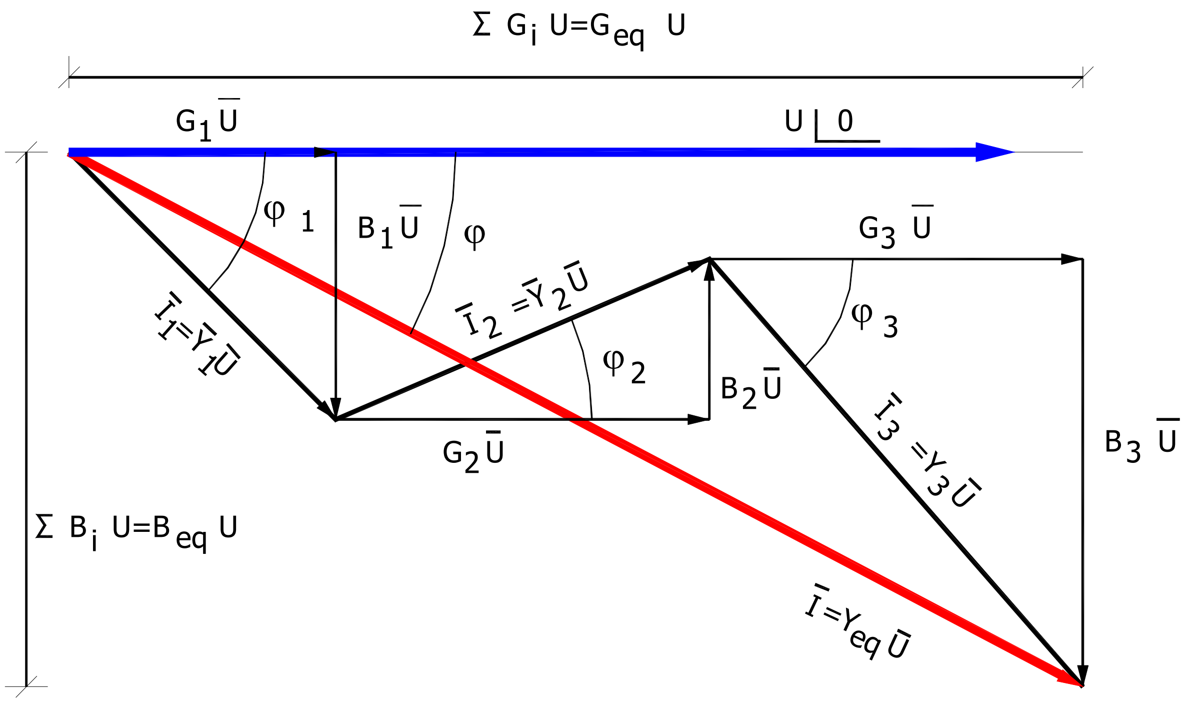
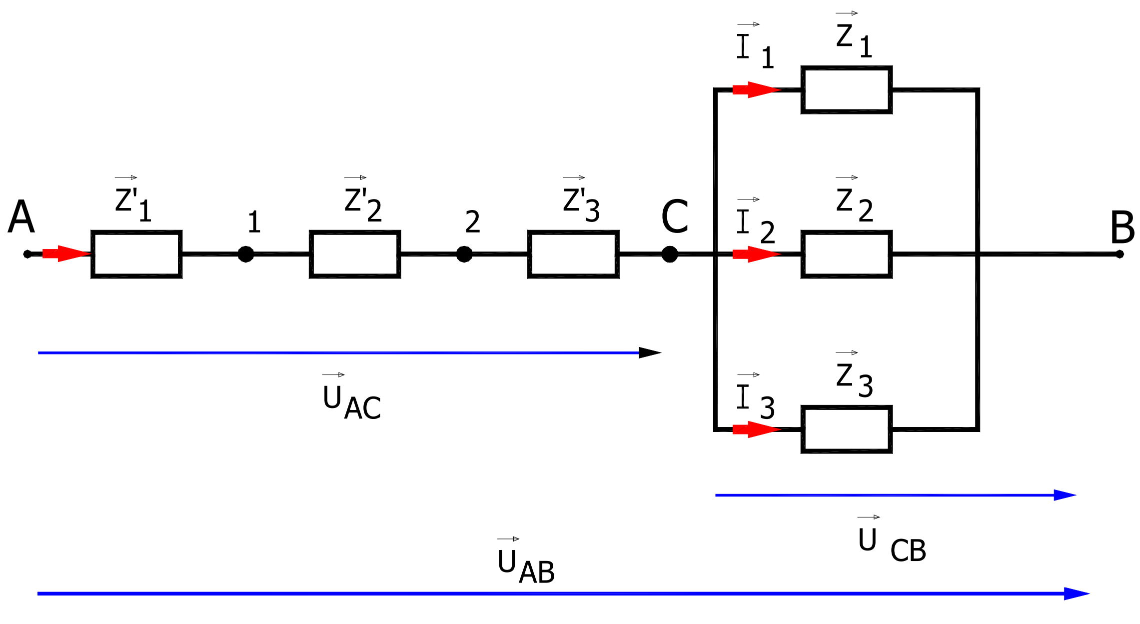


Diagrama vectorial de los fasores tensiones e intensidades

6.5.5.- RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS MIXTOS

La resolución de circuitos correspondientes a un número mayor de elementos en serie o en paralelo no ofrece dificultad y puede verse en el ejemplo siguiente.



Dada la tensión entre los terminales A y B, $u_{AB} = u_1 = U_0$ sen ωt, se va a calcular las intensidades de las corrientes que recorren cada elemento y la tensión en bornes de ellos por el método simbólico.

El fasor correspondiente a esta tensión alterna senoidal será: $\overline{U}_{AB} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}} \underline{|0^0}$ y por lo visto en los apartados anteriores podremos poner que:

$$\overline{U}_{AB} = \overline{U}_{AC} + \overline{U}_{CB} \qquad \overline{Z}_{AB} = \overline{Z}_1^{\prime} + \overline{Z}_2^{\prime} + \overline{Z}_3^{\prime} + \overline{Z}_{CB}$$

siendo la admitancia equivalente entre CB: $\overline{Y}_{CB} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 = \Sigma\, G_i + j\, \Sigma\, B_i$

donde: $G_i = \dfrac{R_i}{R_i^2 + X_i^2}$ y $B_i = \dfrac{-X_i}{R_i^2 + X_i^2}$

por lo que, la impedancia equivalente entre CB será:

$$\overline{Z}_{CB} = R_{CB} + X_{CB}\, j = \frac{\Sigma G_i}{\Sigma G_i^2 + \Sigma B_i^2} + \frac{-\Sigma B_i}{\Sigma G_i^2 + \Sigma B_i^2}\, j$$

con lo que las intensidades y tensiones que se buscaban serán:

$$\overline{I}_{AB} = \overline{I} = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{AB}} = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{AC} + \overline{Z}_{CB}} \qquad |\,\overline{I}_{AB}\,| = \frac{\overline{U}_{AB}}{\sqrt{R_T^2 + X_T^2}}$$

$$\overline{U}_{AC} = \overline{U}_2 = \overline{I}_{AB}\, \overline{Z}_{AC}$$

$$\overline{U}_{CB} = \overline{U}_3 = \overline{I}_{AB}\, \overline{Z}_{CB}$$

$$\overline{I}_1 = \overline{U}_{CB}\, Y_1 \qquad \overline{I}_2 = \overline{U}_{CB}\, Y_2 \qquad \overline{I}_3 = \overline{U}_{CB}\, Y_3$$

$$\overline{I}_{AB} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3$$

DIAGRAMAS DE TENSIONES E INTENSIDADES:

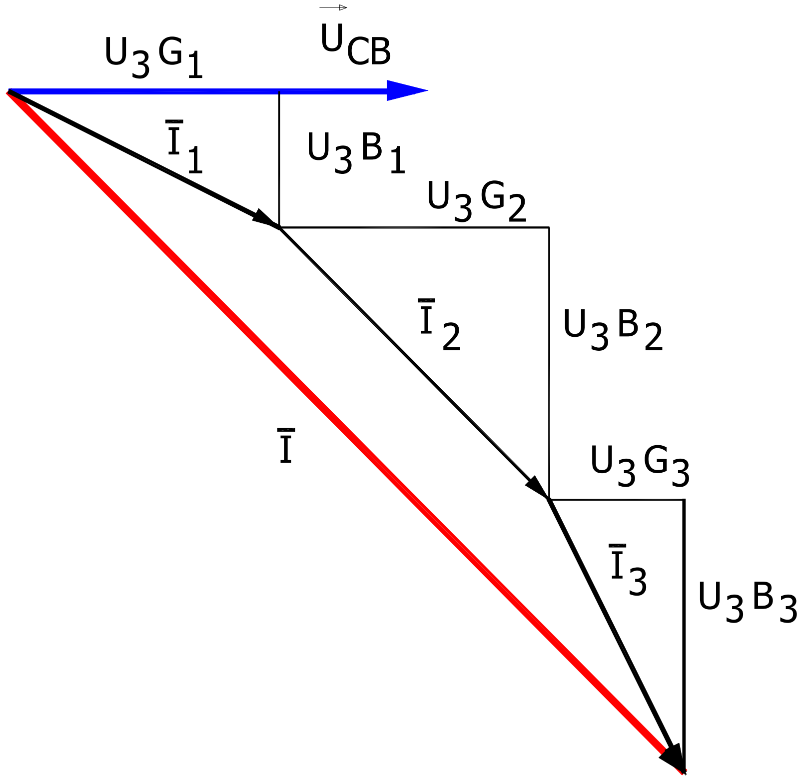


DIAGRAMA DE INTENSIDADES

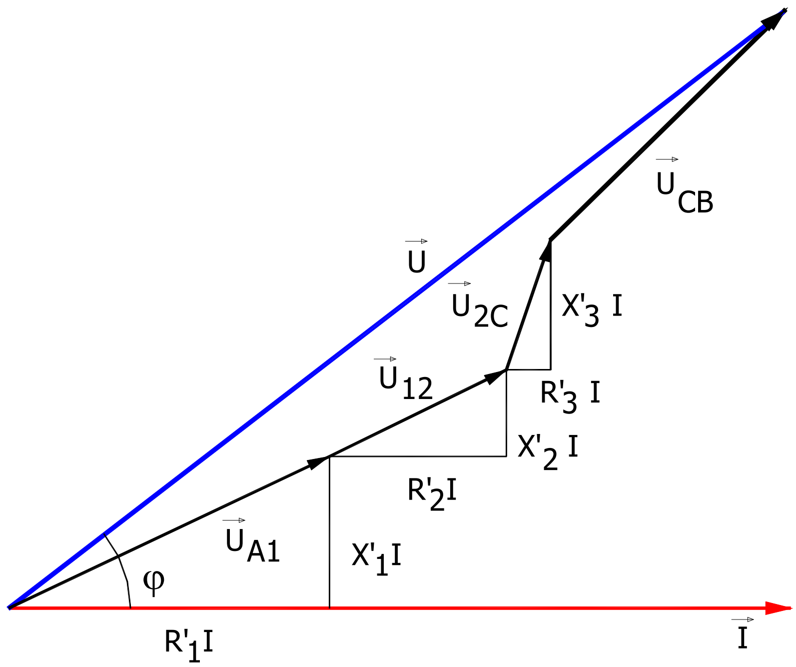


DIAGRAMA DE TENSIONES
CIRCUITO INDUCTIVO

6.5.6.- ANÁLISIS DE CIRCUITOS MEDIANTE FASORES

Por análisis de circuitos mediante fasores queremos significar el análisis de circuitos en estado estacionario (permanente) sinusoidal en el cual las señales se representan por fasores.

Para analizar un circuito por medio de fasores deberemos ver primeramente cómo se escriben dichas ecuaciones en la forma de fasores.

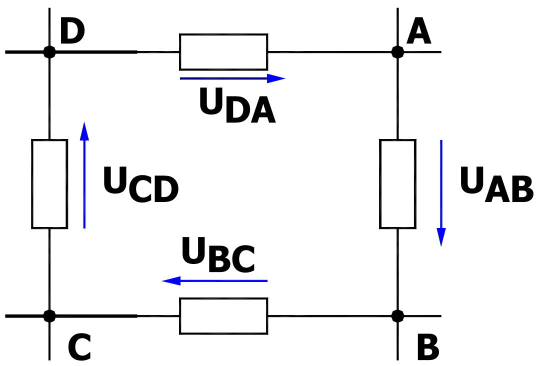
Hemos visto que el análisis de circuitos se basa en un equilibrio establecido por condiciones de dos tipos:

A) Condiciones impuestas a las conexiones (leyes de Kirchhoff).

B) Condiciones impuestas a los dispositivos (ecuaciones características de los elementos).

A) En estado permanente senoidal la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff a lo largo de un bucle del circuito conduciría a una ecuación de la forma:

$$U_{AB}\text{sen}(\omega t + \varphi_{AB}) + U_{BC}\text{sen}(\omega t + \varphi_{BC}) + U_{CD}\text{sen}(\omega t + \varphi_{CD}) + U_{DA}\text{sen}(\omega t + \varphi_{DA}) = 0$$



Ahora bien, en el apartado anterior vimos que existe una correspondencia biunívoca entre sumas de ondas y suma de fasores por tanto también debe cumplirse:

$$\overline{U}_{AB} + \overline{U}_{BC} + \overline{U}_{CD} + \overline{U}_{DA} = 0$$

Al igual ocurre con las ondas senoidales que concurren en un nudo al aplicar la 1ª ley de Kirchhoff también es aplicable a los fasores.

Las leyes de Kirchhoff son aplicables a las ondas y también a los fasores.

B) Condiciones Impuestas a los Dispositivos: Ecuaciones Características de los elementos

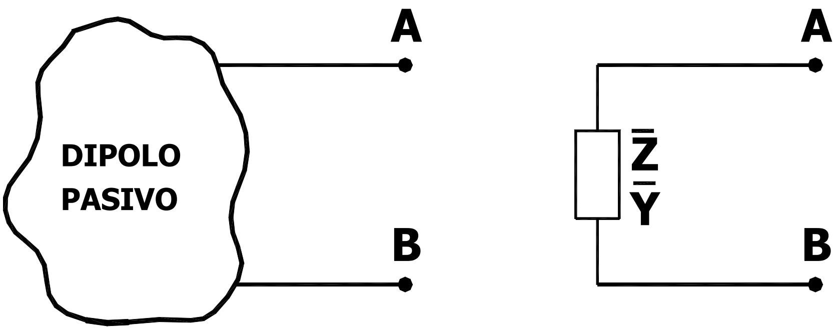
Dispositivo	Ecuación i-u	Ecuación I-U
R	u = i R	$\bar{U} = \bar{I}\,\bar{Z} \qquad \bar{Z} = R \angle 0$
L	u = L di/dt	$\bar{U} = \bar{I}\,\bar{Z} \qquad \bar{Z} = L\omega \angle 90^o$
C	i = C du/dt	$\bar{U} = \bar{I}\,\bar{Z} \qquad \bar{Z} = 1/c\omega \angle -90^o$
	i <–> u	$\bar{U} \leftrightarrow \bar{I}$

La característica $\bar{U} - \bar{I}$ es conocida en cada elemento por lo que se puede determinar la respuesta del elemento ante cualquier excitación alterna senoidal.

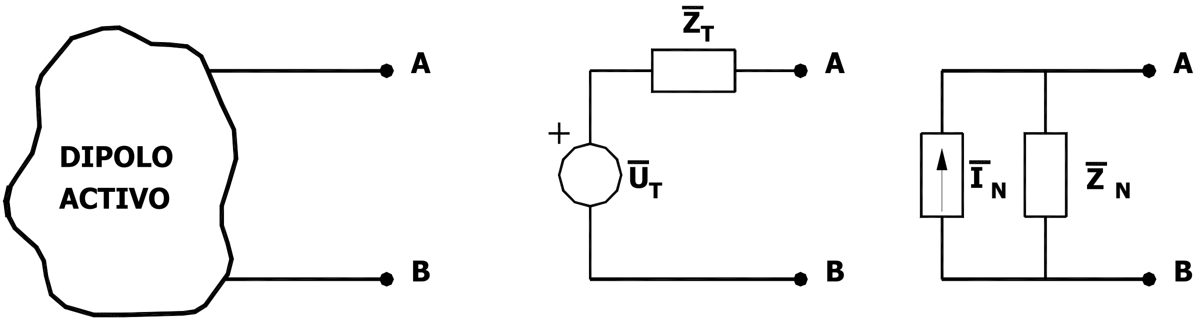
Como se puede observar todas las ecuaciones correspondientes a las leyes de Kirchhoff y de las características de los elementos son aplicables a ondas y también a fasores llegando a los mismos resultados; por consiguiente los teoremas de superposición, Thevenin, Norton, Mallas, Nudos, etc. son aplicables mediante fasores.

Consecuencias:

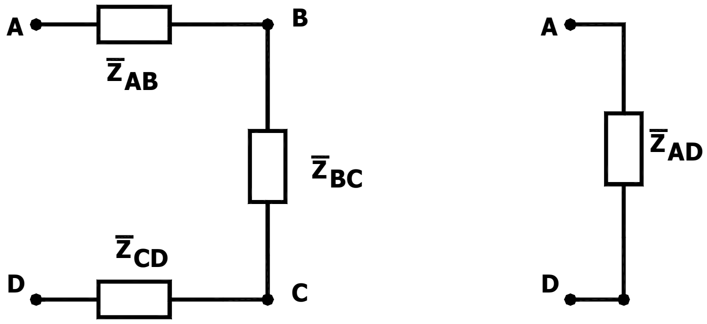
- Todo dipolo pasivo es equivalente a una impedancia única



- Todo dipolo activo puede ser considerado como:
  Un generador. de tensión real (T. de Thevenin)
  Un generador de intensidad real (T. de Norton)

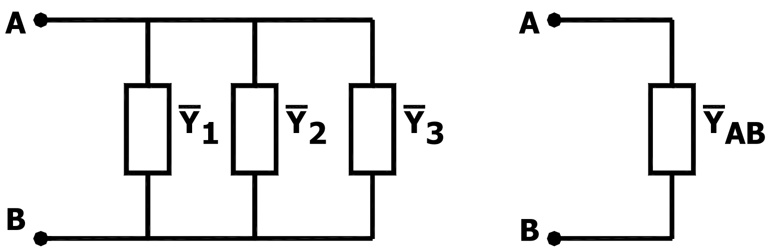


- La impedancia compleja equivalente a impedancias en serie es igual a su suma.



$$\overline{Z}_{AD} = \overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_{BC} + \overline{Z}_{CD}$$

- La admitancia compleja equivalente a admitancias en paralelo es igual a su suma.



$$\overline{Y}_{AB} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3$$

Por lo que: $\dfrac{1}{\overline{Z}_{AB}} = \dfrac{1}{\overline{Z}_1} + \dfrac{1}{\overline{Z}_2} + \dfrac{1}{\overline{Z}_3}$

- Los métodos de análisis de superposición , mallas, nudos, etc., son aplicables mediante fasores.

<u>Resolución de Circuitos Excitados con Fuentes de Excitación Senoidal por el Método Fasorial</u>

1.- Comprobar que todas las fuentes de excitación son de la misma frecuencia. De no ser así hay que recurrir al principio de la superposición.

2.- Hacer que todas las fuentes de excitación estén expresadas mediante la misma función trigonométricas, es decir, que todas sean funciones seno o coseno.

3.- Las funciones de excitación en el dominio del tiempo se reemplazaran por sus fasores representativos.

4.- Determinar las impedancias complejas de los elementos pasivos.

5.- Aplicar cualquier procedimiento valido (Leyes de Kirchhoff, mallas, nudos, teoremas, conversión de fuentes, etc.) Para determinar los fasores de las tensiones e intensidades que interesen.

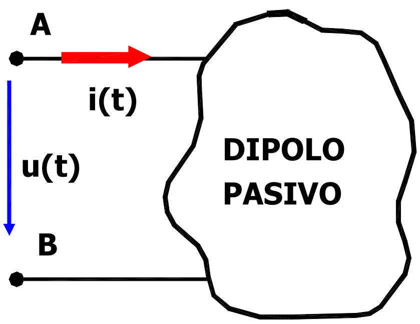
6.- Si es necesario, a partir de los fasores obtenidos se deducirán las correspondientes funciones temporales.

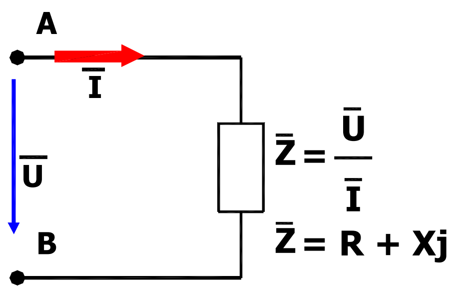
Ejercicio 6.1

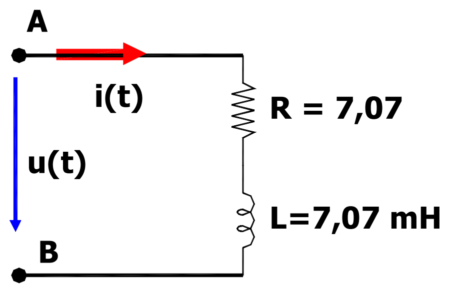
Dada la excitación y respuesta de un circuito pasivo, determinar la impedancia compleja equivalente al circuito y las características (R, L o C) de esta.

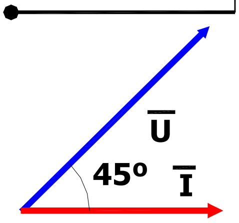
$$u_{AB}(t) = 400\ \mathrm{Sen}(1000\ t + 45^o)\ ; \qquad i_{AB}(t) = 40\ \mathrm{Sen}(1000\ t + 0^o)$$

Solución:









Si trabajamos con valores eficaces, los fasores correspondientes a esta tensión e intensidad serán:

$$\bar{U} = \frac{400}{\sqrt{2}}\underline{|\,45^o} \qquad \mathrm{e} \qquad \bar{I} = \frac{40}{\sqrt{2}}\underline{|\,0^o}$$

por tanto:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{\frac{400}{\sqrt{2}}\underline{|\,45^o}}{\frac{40}{\sqrt{2}}\underline{|\,0^o}} = 10\underline{|\,45^o} = 7{,}07 + 7{,}07\ j$$

sabiendo que la impedancia compleja del circuito es:

$$\bar{Z} = Z\underline{|\,\varphi} = R + Xj = R + (\omega L - \frac{1}{\omega C})j$$

siendo **R** la resistencia equivalente y **X** la reactancia del circuito, podemos observar que la parte imaginaria de la impedancia compleja es positiva , esta corresponde a una reactancia inductiva, por lo que el circuito en cuestión es equivalente a una resistencia en serie con una bobina y los parámetros característicos de estos elementos serán:

R = 7,07 Ω

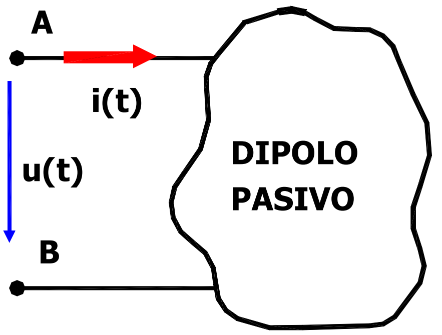
$X = X_L = \omega\ L$ –> **L = 7,07/1000 = 7,07 mH**

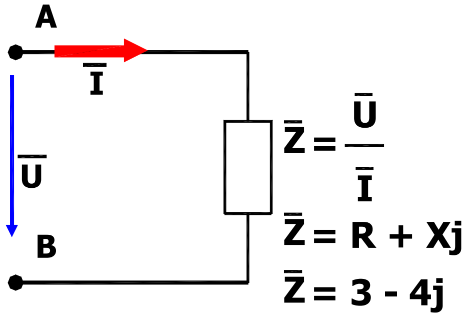
Ejercicio 6.2

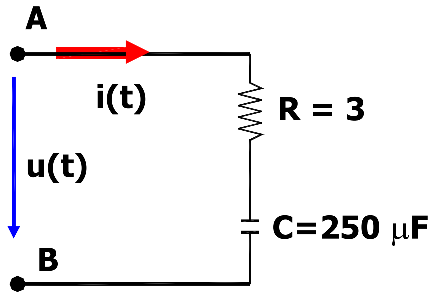
Dada la excitación y respuesta de un circuito pasivo, determinar la impedancia compleja equivalente al circuito y las características (R, L o C) de esta.

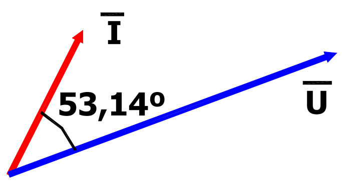
$$u_{AB}(t) = 213{,}13 \text{ Sen}(1000\,t + 25^\circ) \;;\; i_{AB}(t) = 42{,}43 \text{ Sen}(1000\,t + 78{,}14^\circ)$$

Solución:









Si trabajamos con valores eficaces, los fasores correspondientes a esta tensión e intensidad serán:

$$\bar{U} = \frac{212{,}13}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ = 150\angle 30^\circ$$

$$\bar{I} = \frac{42{,}43}{\sqrt{2}}\angle 78{,}14^\circ = 30\angle 78{,}14^\circ$$

por tanto:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{150\angle 25^\circ}{30\angle 78{,}14^\circ} = 5\angle -53{,}14^\circ = 3 - 4\,j$$

sabiendo que la impedancia compleja del circuito es

$$\bar{Z} = Z\angle\varphi = R + Xj = R + (L\omega - \frac{1}{\omega C})j\ ,$$

siendo **R** la resistencia equivalente y **X** la reactancia del circuito, podemos observar que la parte imaginaria de la impedancia compleja es negativa, esta corresponde a una reactancia capacitiva, por lo que el circuito en cuestión es equivalente a una resistencia en serie con un condensador y los parámetros característicos de estos elementos serán:

$\mathbf{R = 3\ \Omega}$

$X = X_C = 1 / (\omega\, C) \;\text{–>}\; \mathbf{C = 1/4000 = 250\ \mu F}$

Ejercicio 6.3

Dada la excitación y respuesta de un circuito pasivo, determinar la impedancia compleja equivalente al circuito y las características (R, L o C) de esta.

$$u_{AB}(t) = 325{,}269\ \mathrm{Sen}(100\,t + 0^\circ)\ ;\quad i_{AB}(t) = 65{,}064\ \mathrm{Cos}(100\,t + 0^\circ)$$

Solución:

Se puede observar que la onda de i(t) esta expresada en diferente ciclo base que la onda de tensión, por lo que para poder compararlas y obtener el desfase entre ambas es necesario expresarla en el mismo ciclo base, podemos escoger la onda seno o la coseno, daría igual, escojemos la onda seno.

$$u(t) = 325{,}269\ \mathrm{Sen}(100\,t + 0^\circ) \quad \rightarrow \quad \bar{U} = \frac{325{,}269}{\sqrt{2}}\underline{|\ 0^\circ} = 230\underline{|\ 0^\circ}$$

$$i(t) = 65{,}064\ \mathrm{Cos}(100\,t + 0^\circ) = 65{,}064\ \mathrm{Sen}(100\,t + 90^\circ) \rightarrow \bar{I} = \frac{65{,}064}{\sqrt{2}}\underline{|\ 90^\circ} = 46\underline{|\ 90^\circ}$$

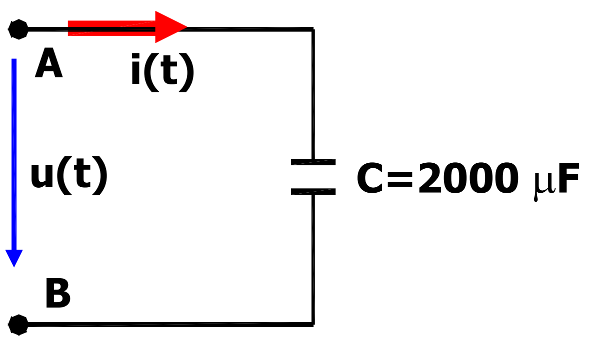
por tanto, el circuito tiene por impedancia compleja:

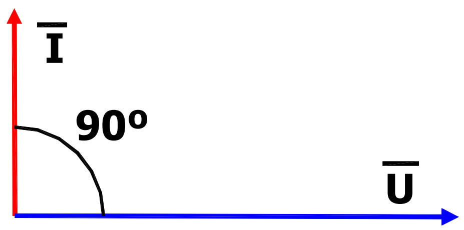
$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{230\underline{|\ 0^\circ}}{46\underline{|\ 90^\circ}} = 5\underline{|\ -90^\circ} = 0 - 5\,j$$

Como la intensidad adelanta exactamente 90º podremos decir que el circuito equivalente entre A y B es capacitivo puro de impedancia compleja igual a -5j, por lo que dipolo equivalente entre A y B será un condensador de capacidad:

$$\bar{Z} = Z\underline{|\ \varphi} = R + Xj = R + (L\omega - \frac{1}{\omega C})j = -\frac{1}{\omega C}j \quad \rightarrow \quad 5 = \frac{1}{100\,C} \quad \rightarrow$$

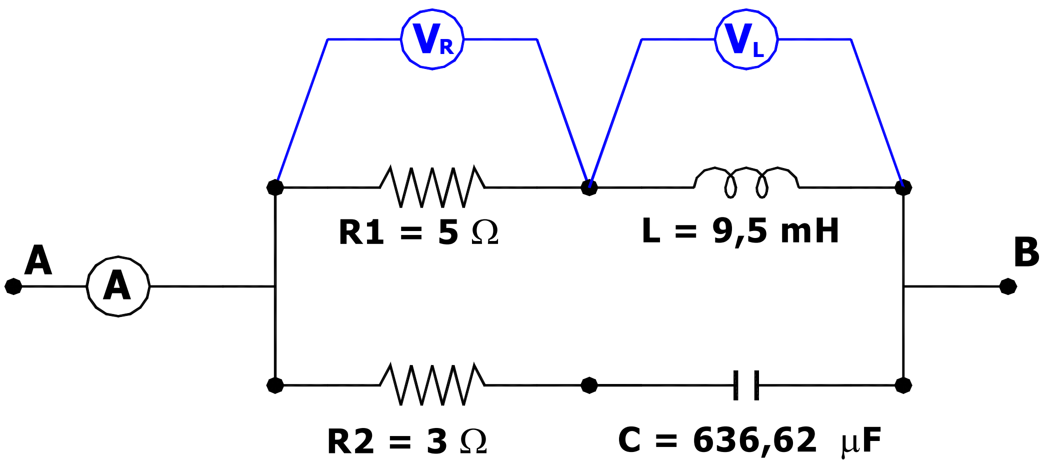
$C = 2000\ \mu F$





Ejercicio 6.4

En una rama de un circuito, excitado con fuentes alternas a 50 Hz, se conoce los parámetros de los elementos de la ramas y la lectura del voltímetro ,V_R = 343 V , determinar la lectura del amperímetro y del voltímetro V_L (ver figura).



Solución: Tomando como fase de referencia la de la caída de tensión en bornes de R_1 es posible calcular la intensidad que circula por esa rama 1.

$$\overline{U}_{R1} = 343\,\angle 0 \;\;\rightarrow\;\; \overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_{R1}}{\overline{Z}_{R1}} = \frac{343\,\angle 0}{5\,\angle 0} = 68,6\,\angle 0 = 58,824 - 35,294\,j$$

Por tanto la tensión en bornes de la bobina será:

$$\overline{Z}_L = L\omega\,\angle 90 = 100\pi \times 0,0095\,\angle 90 = 3\,\angle 90$$

$$\overline{U}_L = \overline{I}_1\,\overline{Z}_L = 68,6\,\angle 0 \times 5\,\angle 90 = 205,8\,\angle 90$$

y la tensión entre A y B valdrá: $\overline{U}_{AB} = \overline{U}_{R1} + \overline{U}_L = 343\,\angle 0 + 205,8\,\angle 90 = 400\,\angle 30,96$

con lo cual ya se podrá calcular la intensidad en la rama 2.

$$\overline{I}_2 = \overline{U}_{AB}/\overline{Z}_2 = \frac{400\,\angle -30,96}{3 - \dfrac{1}{100\,\pi\,636,62 \times 10^{6}}\,j} = 68,6\,\angle 90$$

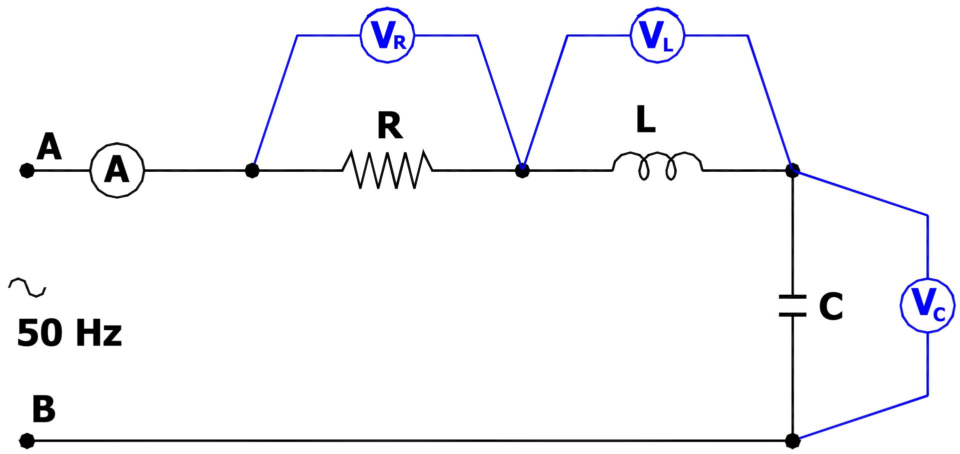
Aplicando el primer lema al nudo A:

$$\overline{I}_{AB} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = 68,6\,\angle 0 + 68,6\,\angle 90 = \sqrt{2}\,68,6\,\angle 45 = 97\,\angle 45$$

Las lecturas de los aparatos serán: A = 97 A; V_L = 205,8 V

Ejercicio 6.5

Si las lecturas de los aparatos de medida son: A = 20 A, V_R = 30 V, V_L = 60 V, y la capacidad del condensador es de 0,637 mF; ¿Que tensión hay entre A y B?



Solución:

Tomando como origen de fases el fasor de la intesidad que circula de A a B, $\overline{I}_{AB} = 20 \angle 0$, el fasor de la tensión en bornes de la resistencia será:

$$\overline{U}_R = 40 \angle 0 = 40 + 0j$$

y consecuentemente el fasor correspondiente a la tensión en bornes de la bobina valdrá:

$$\overline{U}_L = 30 \angle 90 = 0 + 30j$$

Sabiendo que la impedancia del condensador vale: $\overline{Z}_C = -1/(C\omega)j = 5 \angle -90$, podremos determinar fácilmente el fasor de la tensión en bornes del condensador:

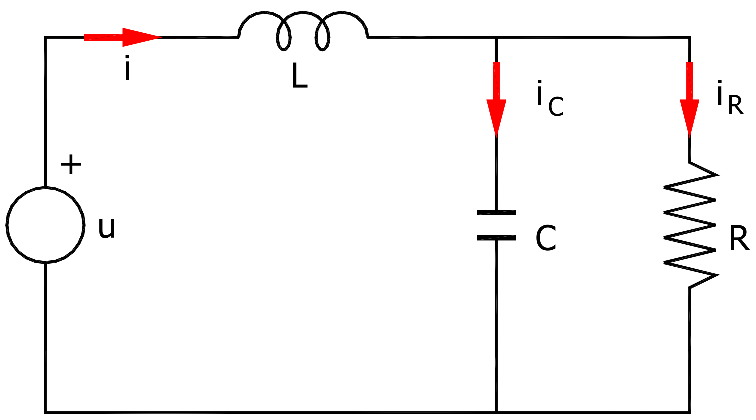
$$U_C = Z_C\, I = 100 \text{ V} \qquad \text{por lo que:} \qquad \overline{U}_C = 100 \angle -90 = 0 - 100j$$

Aplicando el 2º Lema entre A y B:

$$\overline{U}_{AB} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C = 30 - 40j = 50 \angle 306{,}87$$

Por lo que U_{AB} = 50 V

Ejercicio 6.6



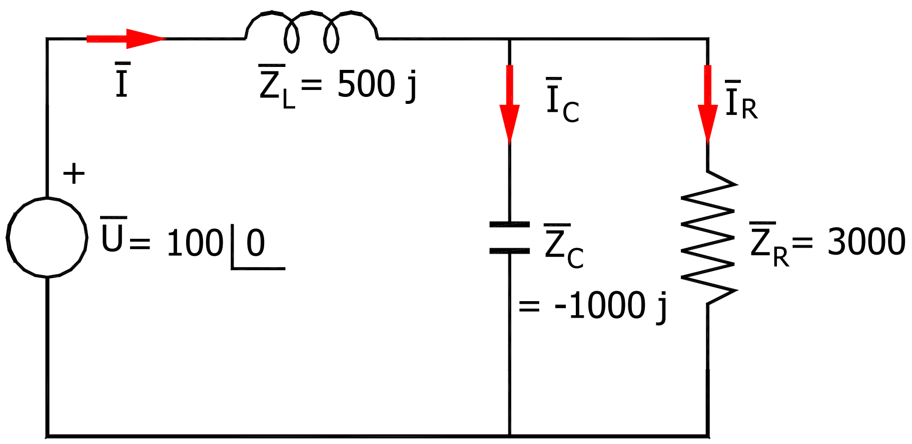
Determinar i, i_C e i_R correspondiente al circuito de la figura, sabiendo que:

u = 100 cos (2000 t)
L = 0,25 H
C = 0,5 μF
R = 3000 Ω

Solución:

Primer paso: Determinanos las impedancias complejas de los diferentes elementos del circuito y el fasor representativo de la fuente de tensión alterna senoidal (vamos a trabajar en este ejercicio con valores máximos):

$$\overline{Z}_R = 3000\ \Omega$$
$$\overline{Z}_L = \omega L j = 500j$$
$$\overline{Z}_C = -\frac{1}{\omega C} j = \frac{1}{2000\times 0{,}5\times 10^{-6}} = -1000\,j$$
$$\overline{U} = 100\underline{|\,0}$$



Segundo paso: resolver el circuito mediante el método simbólico.

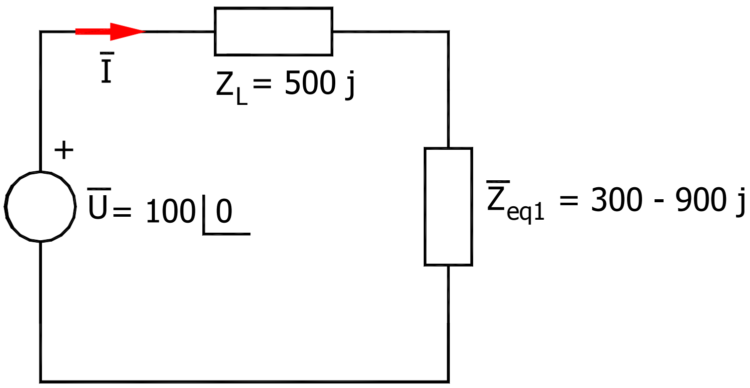
Simplificando el circuito:

Las impedancias correspondientes al condensador y a la resistencia están en paralelo por lo que podremos calcular su impedancia equivalente:

$$\frac{1}{\overline{Z}_{eq_1}} = \frac{1}{\overline{Z}_C} + \frac{1}{\overline{Z}_R} = \frac{1}{1000 \underline{|-90}} + \frac{1}{3000 \underline{|0}}$$

de donde:

$$\overline{Z}_{eq1} = \frac{3000(-1000j)}{3000-1000j} = \frac{-3000j}{3+j} = 300-900j$$



esta queda en serie con la de la bobina:

$$\overline{Z}_{eq_2} = \overline{Z}_{eq_1} + \overline{Z}_L = 300 - 900j + 500j = 300 - 400j$$

directamente:

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_{eq2}} = \frac{100 + 0j}{300 - 400j} = \frac{1}{3 - 4j} = 0{,}2 \underline{|53{,}1}$$

y volviendo al esquema original, podemos calcular las intensidades que nos faltan aplicando división de intensidad:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{Z}_C}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_C}\overline{I} = \frac{-1000j}{3000-1000j} \times 0{,}2\underline{|53{,}1} = 0{,}0632 \underline{|-18{,}5}$$

$$\overline{I}_c = \frac{\overline{Z}_R}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_c}\overline{I} = \frac{3000}{3000-1000j} \times 0{,}2\underline{|53{,}1} = 0{,}190 \underline{|71{,}5}$$

Tercer paso: a partir de los fasores correspondientes se deducen las funciones temporales.

Las ondas de intensidad pedidas valdrán:

$i = 0,2 \cos(2000t + 53,1º)$
$i_R = 0,0632 \cos(2000t - 18,5º)$
$i_C = 0,19 \cos(2000t + 71,5º)$

Nota: - La fase inicial se ha dejado en grados mientras que la pulsación esta en rad/s
- Al trabajar con valores máximos no hace falta multiplicar por $\sqrt{2}$.
- El segundo paso se ha podido resolver por cualquier otro método de análisis, por ejemplo aplicando las leyes de kirchhoff.

Ecuaciones de nudos: $\overline{I} = \overline{I}_C + \overline{I}_R$ (1 ecuación)

Ecuaciones de mallas: $\overline{I}_C \overline{Z}_C - \overline{U} + \overline{I}_L \overline{Z}_L = 0$ (M. Izquierda)

$\overline{I}_R \overline{Z}_R - \overline{I}_C \overline{Z}_C = 0$ (M. Derecha)

Sustituyendo valores:

$$\overline{I} = \overline{I}_C + \overline{I}_R$$

$$\overline{I}_C \times 1000\underline{|\ -90} - 100\ \underline{|\ 0} + \overline{I}_L \times 500\underline{|\ 90} = 0$$

$$\overline{I}_R \times 3000 - \overline{I}_C \times 1000\underline{|\ -90} = 0$$

Se tendrá tres ecuaciones con tres incógnitas. Resolviendolas:

$$\overline{I} = 0,2\ \underline{|\ 53,1}$$

$$\overline{I}_R = 0,0632\ \underline{|\ -18,5}$$

$$\overline{I}_C = 0,190\ \underline{|\ 71,5}$$

Ejercicio 6.7

En el circuito de la figura y con el interruptor K abierto determinar:

a) Lectura de los aparatos de medida.

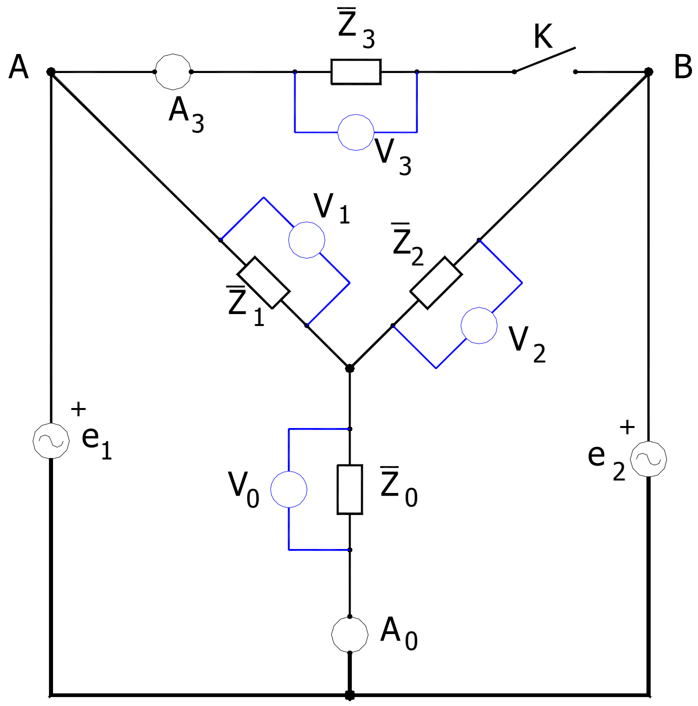
b) Lectura de A_3 y V_3 si se cierra el interruptor K.

Datos:

$$\overline{Z}_1 = 2 + j \quad ; \quad \overline{Z}_2 = 1 - 6j \quad ; \quad \overline{Z}_3 = 1 - j \quad ; \quad \overline{Z}_0 = 2 + 2j$$

$$e_1(t) = 25\sqrt{2}\,\cos\,(100\pi t + \pi/2)\ \mathrm{V}$$

$$e_2(t) = 50\ sen\ (100\pi t + \pi/4)\ \mathrm{V} = 50\ \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{V}$$



a) Interruptor abierto:

Obtenemos los fasores correspondientes a las fuentes de tensión:

$$\overline{E}_1 = 25\ \underline{|\,90^0}\ V$$

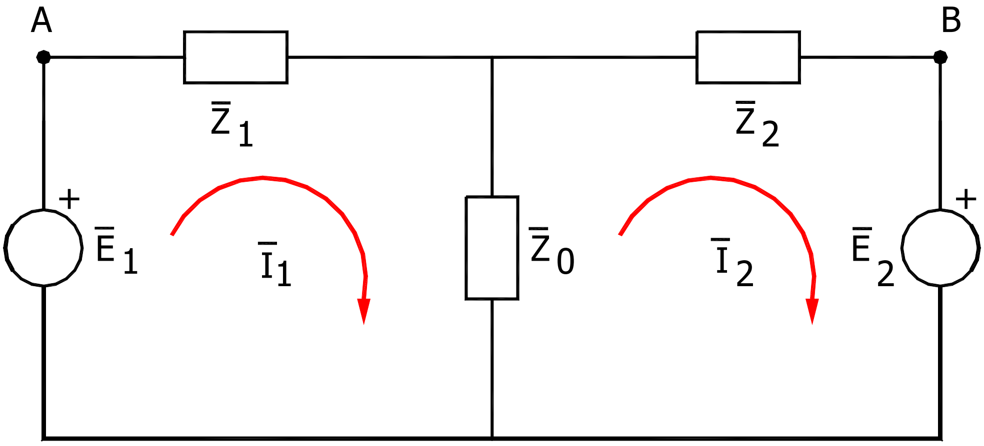
$$\overline{E}_2 = 25\sqrt{2}\ \underline{|\,-45}\ V$$

Determinamos la forma polar de las impedancias de los diferentes elementos:

$$\overline{Z}_1 = 2 + j = \sqrt{5}\ \underline{|26{,}56}\ \Omega$$

$$\overline{Z}_2 = 1 - 6j = \sqrt{37}\ \underline{|-80{,}54}\ \Omega$$

$$\overline{Z}_0 = 2 + 2j = 2\sqrt{2}\ \underline{|45}\ \Omega$$



Aplicando el método de las mallas matricialmente se tendrá:

$$\begin{vmatrix} \overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{E}_1 \\ -\overline{E}_2 \end{vmatrix}$$

siendo:

$$\overline{Z}_{11} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_0 = 2 + j + 2 + 2j = 4 + 3j = 5\ \underline{|36{,}87}$$

$$\overline{Z}_{12} = \overline{Z}_{21} = -\overline{Z}_0 = -2 - 2j = -2\sqrt{2}\ \underline{|45}$$

$$\overline{Z}_{22} = \overline{Z}_2 + \overline{Z}_0 = 3 - 4j = 5\ \underline{|-53{,}13}$$

resolviendo el sistema:

$$\overline{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 25\ \underline{|90} & -25\sqrt{2}\ \underline{|45} \\ -25\sqrt{2}\ \underline{|45} & 5\ \underline{|-53{,}13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5\ \underline{|36{,}87} & -2\sqrt{2}\ \underline{|45} \\ -2\sqrt{2}\ \underline{|45} & 5\ \underline{|-53{,}13} \end{vmatrix}} = -1{,}4 + 2{,}25j = 2{,}65\ \underline{|122}$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 \angle 36{,}87 & 225 \angle 90 \\ -2\sqrt{2} \angle 45 & -25\sqrt{2} \angle -45 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 \angle 36{,}87 & -2\sqrt{2} \angle 45 \\ -2\sqrt{2} \angle 45 & 5 \angle -53{,}13 \end{vmatrix}} = -8{,}14 + 1{,}96j\ A = 8{,}38 \angle 193{,}56\ A$$

La corriente que pasa por la rama central I_0 valdrá:

$$\overline{I}_0 = \overline{I}_1 - \overline{I}_2 = 6{,}74 + 4{,}21j = 7{,}95 \angle 32\ A$$

por lo que la lectura del amperímetro será el valor eficaz de esta corriente: A_0 = 7,95 A

Las fasores de las tensiones en bornes de las impedancias serán:

$$\overline{U}_1 = \overline{I}_1\, \overline{Z}_1 = 5 \angle 26{,}56 \cdot 2{,}65 \angle 122 = 5{,}93 \angle 148{,}56\ V$$

$$|\,\overline{U}_2\,| = |\,\overline{Z}_2\,|\ |\,\overline{I}_2\,| = \sqrt{37} \times 8{,}38 = 50{,}97\ V$$

$$|\,\overline{U}_0\,| = 2\sqrt{2} \times 7{,}95 = 22{,}5\ V$$

por lo que los diferentes voltímetros indicaran:

V_1 = 5,93 V
V_2 = 50,97 V
V_0 = 22,5 V

b) Este apartado se resolverá aplicando Thevenin.

La tensión de Thevenin será la tensión en vacío entre A y B

$$\overline{U}_{AB} = \overline{E}_1 - \overline{E}_2 = 25 \angle 90 - \sqrt{2}\, 25 \angle -45 = 55{,}90 \angle 116{,}56$$

La impedancia de Thevenin se determinara anulando las fuentes de tensión y calculando la impedancia equivalente entre A y B:

$$\overline{Z}_{AB} = 0$$

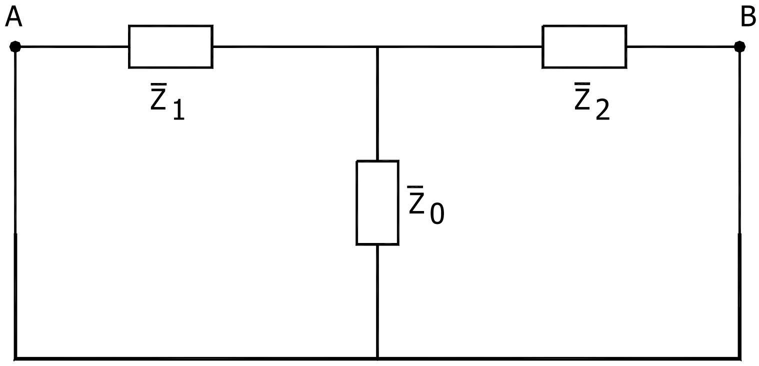
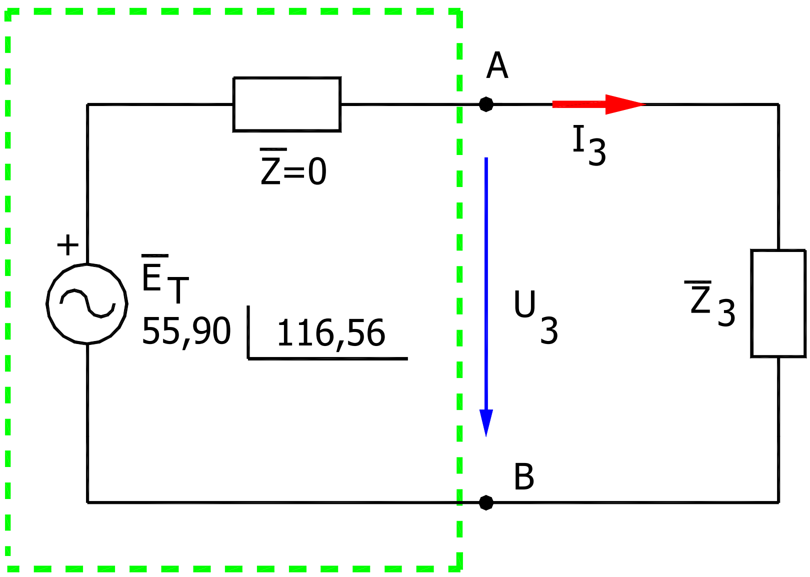


Fig: Circuito resultante de la anulación de las fuentes de tensión

Una vez que se ha obtenido el equivalente de Thevenin entre A y B se podrá determinar el fasor de la intensidad que circula por Z_3:



$$\bar{I}_3 = \frac{55{,}9\ \underline{|116{,}56}}{1-j} = 39{,}53\ \underline{|161{,}56}\ A$$

y ya podremos saber las indicaciones de los aparatos de medida pedidos:

Lectura de A_3: 39, 53 A

Lectura de V_3: 55,9 V