TEMA 3

TEOREMAS DE LA TEORÍA DE CIRCUITOS

Francisco J. Casares de la Torre
Marzo 2010

TEMA 3
TEOREMAS DE LA TEORÍA DE CIRCUITOS

3.1.- CLASES DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

1.- CIRCUITOS LINEALES: Son aquellos cuyo comportamiento puede caracterizarse mediante una ecuación diferencial lineal. Sus elementos han de ser lineales, o sea, las respuestas de estos circuitos son funciones lineales de las entradas.

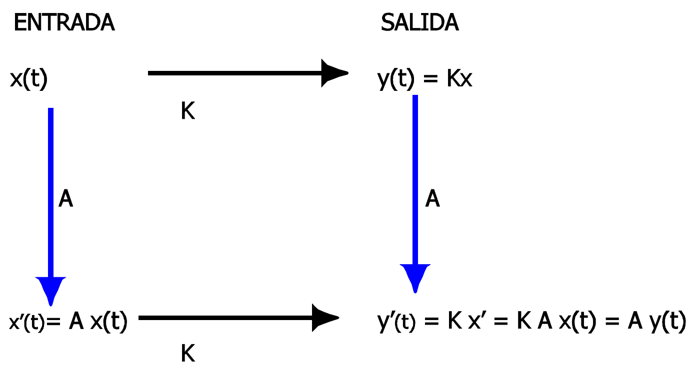
2.- CIRCUITOS CUASILINEALES: Son los que contienen uno o más elementos no lineales, pero que al menos en un margen de su funcionamiento pueden considerarse como lineales. Para este tipo de circuitos puede emplearse la teoría de análisis de los circuitos lineales.

3.- CIRCUITOS NO LINEALES: No puede establecerse en ellos la hipótesis de linealidad, dentro de un margen de aproximación permisible. Requieren el empleo de técnicas especiales de análisis.

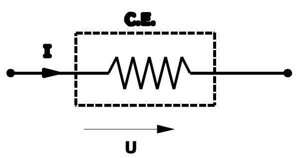
Los elementos estudiados hasta ahora, son elementos lineales, por lo que los circuitos formados por la combinación de estos serán circuitos lineales.

3.2.- PROPIEDADES DE LOS CIRCUITOS LINEALES

A) **Homogeneidad**: Si **x(t)** e **y(t)** son las funciones excitación y respuesta correspondientes a un sistema lineal (siendo **y = Kx** la función lineal, **K** = constante) se verificará que a la excitación **Ax(t)** responde el sistema con **Ay(t)**, siendo **A** una constante.



por ejemplo, si en una resistencia:



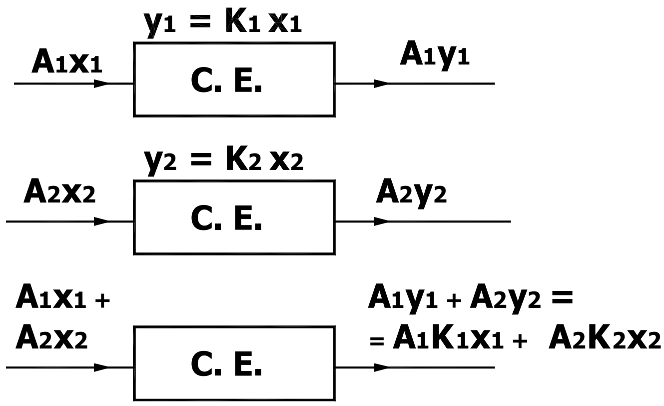
excitación: **i** respuesta: **u = R · i**

excitación: **i'= Ai** respuesta: **u'= R · i'= R·A·i = A · u**

Un circuito será lineal solo en las variables de intensidad y tensión, pero no en la potencia.

Esta propiedad de homogeneidad en análisis de circuitos se llama **PROPORCIONALIDAD.**

B) **Aditividad**: La salida debida a dos o más entradas se puede hallar sumando las salidas que se obtiene cuando se aplica por separado cada una de las entradas.



O sea, toda combinación lineal de las señales de entrada o funciones de excitación, tiene por respuesta análoga combinación lineal de las correspondientes salidas o funciones respuestas.

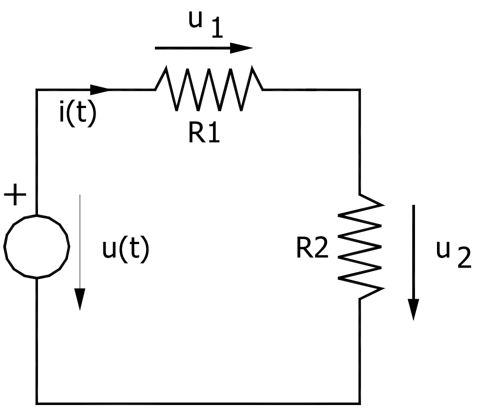
A la propiedad de aditividad, en Electrotecnia, se le llama **SUPERPOSICIÓN**.

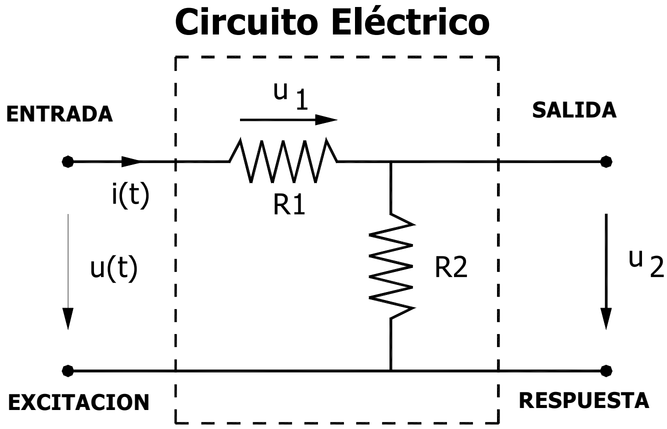
3.2.1.- PROPORCIONALIDAD

Las relaciones entradas-salidas de los circuitos eléctricos tienen la propiedad de la homogeneidad. Veamos con ejemplos de circuitos eléctricos que existe proporcionalidad en circuitos con resistencias, bobinas y condensadores.

EJEMPLO: PROPORCIONALIDAD EN RESISTENCIAS

Si en el circuito siguiente consideramos que la excitación es **u** y la respuesta del circuito es $\mathbf{u_2}$, se tendrá:

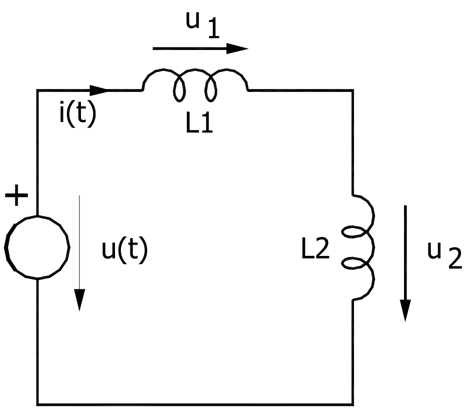


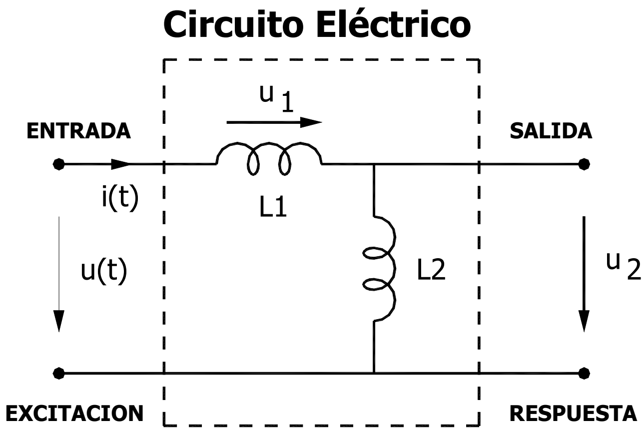


Por división de tensión: $u_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} u = K \cdot u$ siendo $K = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ una constante que solo depende del valor óhmico de las resistencias, por lo que los circuitos con resistencias son lineales. Esto implica que ante una excitación **u'= u · A** la respuesta será: $\mathbf{u'_2 = K\,A\,u = A\,u_2}$

EJEMPLO: PROPORCIONALIDAD EN BOBINAS

En el circuito de la figura, si la excitación es **u** y la respuesta del circuito es $\mathbf{u_2}$, se tendrá:



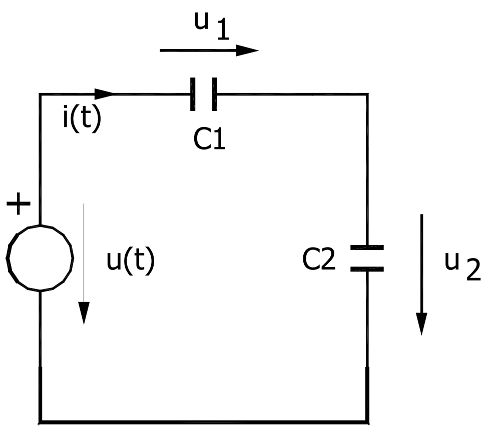


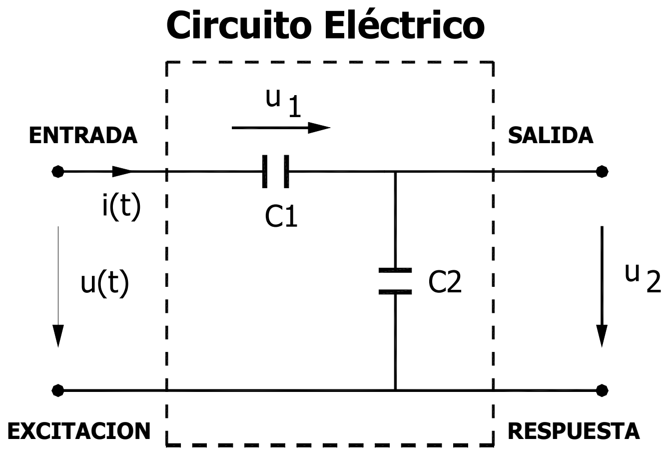
$$i = \frac{1}{L_1 + L_2} \int u\, dt \quad \text{por lo que} \quad u_2 = L_2 \frac{di}{dt} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} u = K\,u \quad \text{siendo} \quad K = \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

que es una constante que depende de las características de los elementos del circuito, en este caso bobinas, por lo que los circuitos con bobinas son lineales. Esto nos lleva a que si la excitación es: **u'= A u** siendo **A** una constante; La respuesta será: $\mathbf{u'_2 = K\,u' = K\,A\,u = A\,u_2}$**.**

EJEMPLO: PROPORCIONALIDAD EN CONDENSADORES

En el ejemplo de la figura , si la excitación es **u** y la respuesta del circuito es $\mathbf{u_2}$, se tendrá:





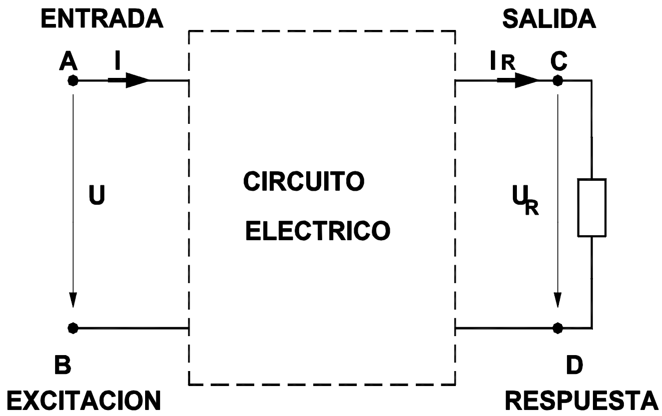
$$u = \frac{1}{C_1}\int i\,dt + \frac{1}{C_2}\int i\,dt \quad \text{de donde} \quad u = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int i\,dt \text{ , despejando:}$$

$$u\,\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \int i\,dt \quad (1) \quad \text{como} \quad u_2 = \frac{1}{C_2}\int i\,dt \quad (2) \quad \text{sustituyendo (1) en (2):}$$

$$u_2 = \frac{C_1 \cdot C_2}{(C_1 + C_2)\,C_2}\,u = \frac{C_1}{C_1+C_2}\,u = K\,u \quad \text{siendo} \quad K = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

que como observamos es función de los valores característicos de los elementos pasivos del circuito, por lo tanto constante, y de esta forma vemos que los circuitos con condensadores también son lineales, por lo que si la excitación es : **u'= A u** siendo **A** una constante, la respuesta será: $\mathbf{u'_2 = K\,u' = K\,A\,u = A\,u_2}$.

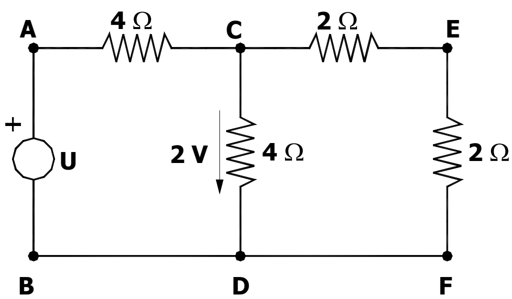
Con estos ejemplos comprobamos que existe proporcionalidad en los circuitos eléctricos que tienen estos tres elementos lineales. Propiedad que nos sirve para dar respuesta a una pregunta frecuente en la resolución de circuitos, la cual es: ¿Que tensión tengo que tener entre dos puntos para que me pase una intensidad determinada por un elemento o conseguir una tensión en bornes de este?

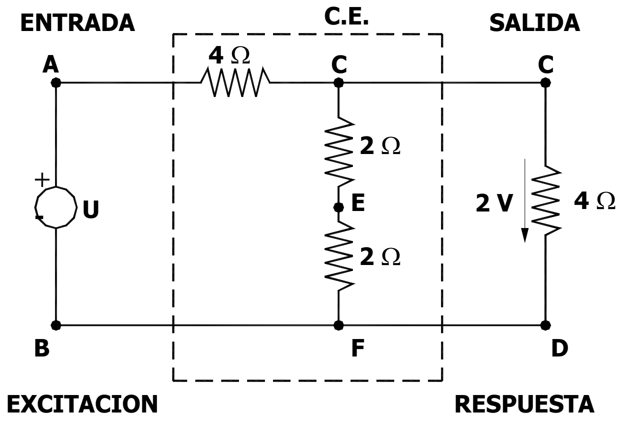


Para resolver este problema se utiliza una técnica de análisis basada en la proporcionalidad de los circuitos eléctricos, la cual se llama **método de la respuesta unidad**, que consiste en suponer una excitación de valor unidad, con la cual hallamos la respuesta del circuito y por lo tanto la relación de proporcionalidad que nos interesa. Una vez obtenida esta relación, se puede obtener fácilmente la respuesta del C.E. ante cualquier excitación, o al revés, es simplemente una regla de tres.

Veamos con un simple ejemplo como se aplica esta técnica.

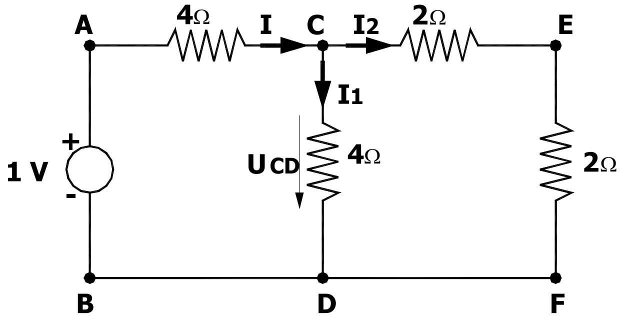
Ejemplo: Dado el circuito de la figura calcular que característica debe tener la fuente de tensión para que la diferencia de potencial entre **C** y **D**, $\mathbf{U_{CD}}$, sea de 2 voltios.





En este ejemplo la excitación es $\mathbf{U_{AB}}$ y la respuesta que nos interesa $\mathbf{U_{CD}}$.

Damos un sentido arbitrario a las intensidades de rama, según se puede observar en el esquema y planteamos una ecuación de intensidades en el nudo **C** y dos ecuaciones de tensiones obtenidas de las mallas correspondientes, con lo que tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas.



Numero de nudos principales: 2 (C y D)

Numero de eslabones = Nº de mallas = 2

$I = I_1 + I_2$ (nudo C)

$4\,I_2 - 4\,I_1 = 0$ (malla CEFD)

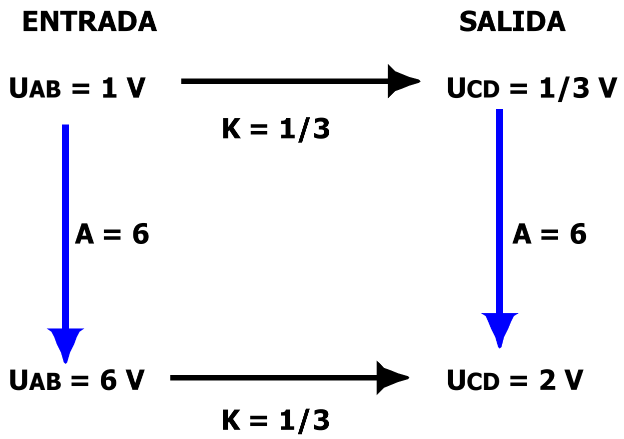
$4\,I_1 - 1 + 4\,I = 0$ (malla CDBA)

despejando I_1 del sistema de ecuaciones se tendrá que: $I_1 = 1/12$ A, con lo cual la tensión entre C y D para una excitación de 1 V entre A y C valdrá: $U_{CD} = I_1\,R_{CD} = 1/12 \times 4 = 1/3$ V esto implica que la constante de linealidad será:

$U_{CD} = K\,U_{AB}$ –> $1/3 = K \cdot 1$ –> $K = 1/3$

y sabiendo que $U_{CD} = 2$ V, implica que la fuente tendrá una característica de $U_{AB} = 6$ V.

Gráficamente:



Si la entrada aumenta 6 veces la salida aumenta 6 veces, debido a la existencia de la propiedad denominada proporcionalidad.

Comprobemos que por las leyes de Kirchhoff da el mismo resultado. Planteando las ecuaciones:

Nudo C –> $I - I_1 - I_2 = 0$

Malla CEFD –> $4\,I_2 - 4\,I_1 = 0$

Malla CDBA –> $4\,I_1 - 6 + 4\,I = 0$

resolviendo el sistema: $I_1 = 6/12 = 0{,}5$, $U_{CD} = I_1 \bullet R_{CD} = 2$ V

3.2.2.- SUPERPOSICIÓN

Las relaciones entrada-salida de los circuitos lineales tienen la propiedad de aditividad de las funciones lineales.

Cualquier salida (tensión o intensidad de la corriente en una rama) se puede escribir en la forma

$$y = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n) = K_1x_1 + K_2x_2 + ...K_nx_n$$

siendo:

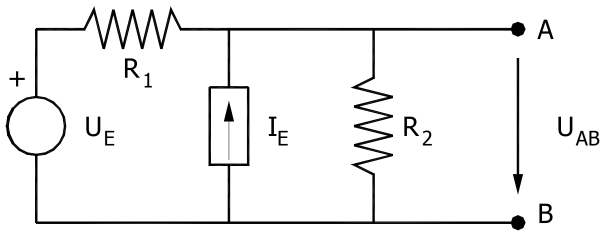
$x_1, x_2, ..., x_n$ las entradas al circuito
$K_1, K_2, ..., K_n$ constantes que dependen del circuito.

La salida es una combinación lineal de las entradas.

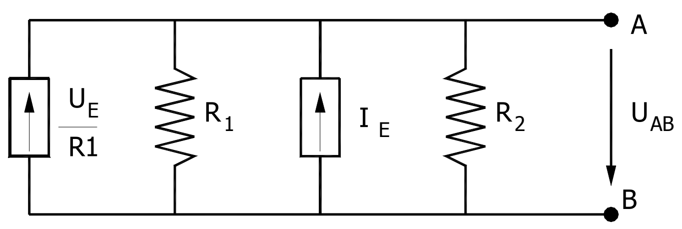
Una técnica de análisis de circuitos basada en la superposición procede de la manera siguiente:

1.- Desconectar todas las fuentes de señal de entrada menos una y hallar la salida debida a dicha señal solamente.
2.- Repetir el paso 1 sucesivamente para cada una de las demás fuentes de señal.
3.- La salida en el caso de que estén conectadas todas las fuentes se encuentra entonces sin más que sumar las respuestas correspondientes a cada fuente actuando sola.

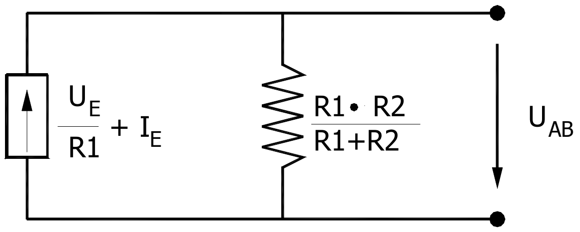
Para ilustrar esta técnica de análisis determinemos la salida "U_{AB}" del circuito de la figura por conversión de fuentes,



primeramente transformaremos la fuente de tensión en fuente de intensidad,



reducimos las fuentes de intensidad y las resistencias en paralelo



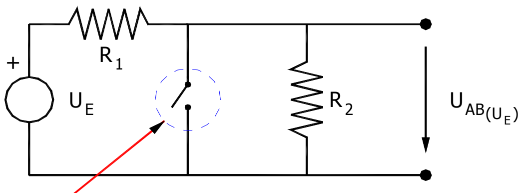
y de aquí podemos deducir que $U_{AB} = \left(\frac{U_E}{R_1} + I_E \right) \cdot \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}$ operando:

$$U_{AB} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_E + I_E \left[\frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}\right] = K_1\mathbf{U_E} + K_2\mathbf{I_E} = K_1x_1 + K_2x_2$$

siendo: $K_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ y $K_2 = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}$ constantes.

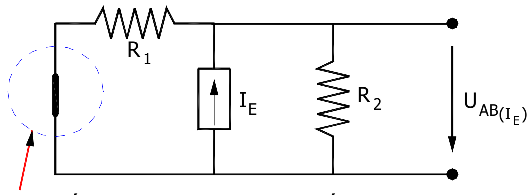
"La salida resulta ser una combinación lineal de las entradas"

Y ahora, vamos a determinar la salida del circuito anterior utilizando "Superposición".



Anulación de la fuente de intensidad

+



Anulación de la fuente de tensión

$$\boxed{U_{AB(U_E)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_E}$$

Respuesta para entrada $\mathbf{U_E}$

$$\boxed{U_{AB(I_E)} = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2} I_E}$$

Respuesta para entrada $\mathbf{I_E}$

Por superposición: $\mathbf{U_{AB} = U_{AB(UE)} + U_{AB(IE)}}$

$$\mathbf{U_{AB} = K_1\, U_E + K_2\, I_E}$$

siendo: $K_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ y $K_2 = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}$ las constantes de proporcionalidad.

3.3.- RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS

En este apartado vamos a estudiar un conjunto de métodos que a menudo simplifica el análisis de los circuitos lineales. Estos métodos están basados en los lemas Kirchhoff y principio de la superposición, y sirven para analizar cualquier circuito independiente de su excitación, pero por razón de sencillez solo se deducirán para **corriente continua**.

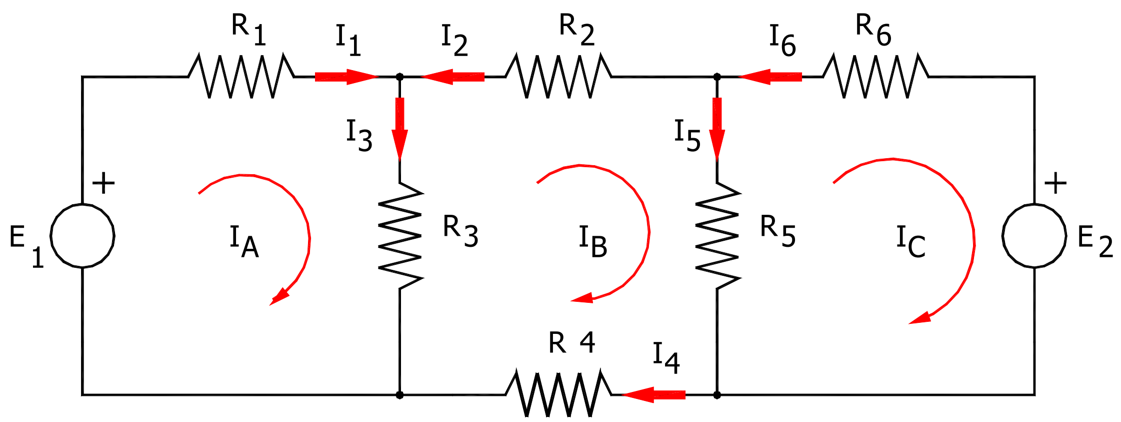
El método de las Mallas y el de los nudos son métodos generales de análisis, son métodos formales, que se pueden dividir en dos fases. En la primera seleccionamos un conjunto de variables del circuito y formulamos un sistema de ecuaciones lineales que describe el circuito. En la segunda o fase de solución manipulamos este sistema de ecuaciones para determinar las variables de interés.

Los teoremas de Thevenin y Norton constituyen poderosas herramientas para el análisis de parte de los circuitos.

3.3.1.- MÉTODO DE LAS MALLAS

Este método emplea implícitamente el 1º Lema de Kirchhoff y el 2º lema lo utiliza en forma explícita, de tal forma que se obtiene gran economía de manipulación algebraica en comparación con los lemas de kirchhoff.

Consideremos el Circuito de la figura



Por los LEMAS DE KIRCHHOFF, asignaríamos unas corrientes de ramas $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$, $\mathbf{I_3}$, $\mathbf{I_4}$, $\mathbf{I_5}$ e $\mathbf{I_6}$ que serían nuestras incógnitas, y dispondríamos de las siguientes ecuaciones para resolverlo:

3 ecuaciones nodales (nudos principales -1)

3 ecuaciones de malla.

tendríamos: **6** ecuaciones con **6** incógnitas.

Por el "método de Mallas" se consideran que existen unas corrientes en las mallas de la Red $\mathbf{I_A}$, $\mathbf{I_B}$, $\mathbf{I_C}$ que serán las incógnitas, con lo que reduciremos el numero de ecuaciones a plantear, tendremos tantas ecuaciones como mallas o lazos básicos. A estas corrientes le daremos a todas el mismo sentido (por conveniencia) y pueden identificarse con las corrientes de rama, de forma que:

<u>Corrientes de malla</u>		<u>Corrientes de ramas</u>
$I_A = I_1$		$I_1 = I_A$
$I_B = I_4 = -I_2$		$I_2 = - I_B$
$I_C = -I_6$	➜	$I_3 = I_A - I_B$
		$I_4 = I_B$
		$I_5 = I_B - I_C$

Si aplicamos el 2º lema de Kirchhoff al circuito podremos obtener r-(n-1) ecuaciones independientes y podrán ser:

$I_3 R_3 - E_1 + I_1 R_1 = 0$ E. Malla "A"

$- I_2 R_2 + I_5 R_5 + I_4 R_4 + I_4 R_4 - I_3 R_3 = 0$ E. Malla "B"

$- I_6 R_6 + E_2 - I_5 R_5 = 0$ E. Malla "C"

sustituyendo las intensidades de ramas por intensidades de malla se tendrá:

$$E_1 = R_1 I_A + (I_A - I_B) R_3$$

$$0 = (I_B - I_A) R_3 + I_B R_2 + (I_B - I_C) R_5 + I_B R_4$$

$$-E_2 = (I_C - I_B) R_5 + I_C R_6$$

Reagrupando se obtendrá:

$E_1 = I_A (R_1 + R_3) - I_B R_3$ E. Malla "A"

$0 = -I_A R_3 + I_B (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) -I_C R_5$ E. Malla "B"

$-E_2 = -I_B R_5 + I_C (R_5 + R_6)$ E. Malla "C"

Ya tenemos 3 ecuaciones con tres incógnitas. Lo resolvemos y obtendremos las intensidades de malla, y a partir de estas, las intensidades de rama, con lo cual tendremos resuelto el circuito. Se ha reducido el numero de ecuaciones a resolver a tres.

Interpretemos estas ecuaciones, para ver si se pueden plantear directamente:

En la ecuación Malla "A":

1º miembro: Es igual a la suma de f.e.m. de la malla –> ΣE_{1i}

2º miembro: Coeficiente de I_A: Es la resistencia propia de la malla, igual a la suma de las resistencias de dicha malla

Coeficiente de I_B: Suma de resistencias comunes a la malla "A" y "B" con signo cambiado

En las demás mallas la interpretación es la misma. En forma matricial y generalizando

$$\begin{pmatrix} R_{AA} & R_{AB} & R_{AC} \\ R_{BA} & R_{BB} & R_{BC} \\ R_{CA} & R_{CB} & R_{CC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_A \\ E_B \\ E_C \end{pmatrix}$$

siendo:

$R_{AA} = \Sigma$ Resistencias de la malla "A"

$R_{AB} = R_{BA} = \Sigma$ Resistencias comunes a las mallas "A" y "B" con signo negativo

$R_{AC} = R_{CA} = \Sigma$ Resistencias comunes a las mallas "A" y "C" con signo negativo

$R_{BC} = R_{CB} = \Sigma$ Resistencias comunes a las mallas "B" y "C" con signo negativo

$R_{BB} = \Sigma$ Resistencias de la malla "B"

$R_{CC} = \Sigma$ Resistencias de la malla "C"

$E_A = \Sigma$ f.e.m. de la malla "A"

$E_B = \Sigma$ f.e.m. de la malla "B"

$E_C = \Sigma$ f.e.m. de la malla "C"

ya tenemos formulado el sistema de ecuaciones lineales que describe el circuito, la resolución del sistema se puede hacer por ejemplo por Cramer.

Para un sistema con M mallas el planteamiento será exactamente igual. Y en forma matricial y generalizando será:

R_{ii}: suma de todas las resistencias de la malla i.

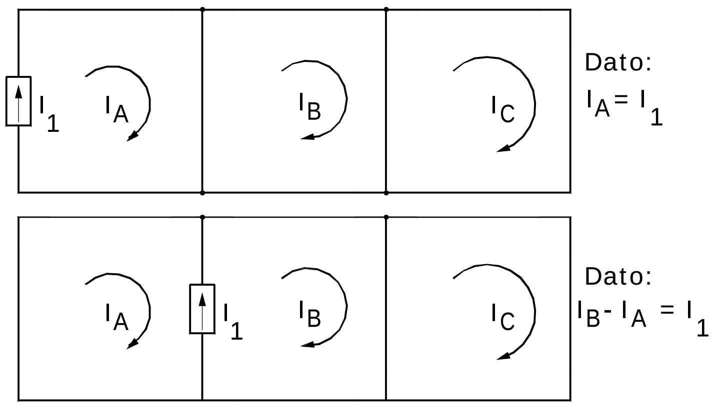
R_{ik}: suma de todas las resistencias comunes a las mallas i y k cambiadas de signo

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{AA} & R_{AB} & \cdot\ \cdot\ \cdot & R_{Am} \\ R_{BA} & R_{BB} & \cdot\ \cdot\ \cdot & R_{Bm} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ R_{mA} & R_{mB} & \cdot\ \cdot\ \cdot & R_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_m \end{pmatrix}$$

ε_i: suma de todas las f.e.m. de la malla i.

I_i: corriente ficticia de la malla i.

En este método hay que tener en cuenta que se ha aplicado el 2º lema a lo largo de unos caminos cerrados que coinciden con las mallas. En estos recorridos no puede haber ninguna fuente de intensidad pues la tensión en sus bornes es desconocida, depende del circuito exterior. Por lo que todas las fuentes de energía deben ser de tensión en caso de que exista una fuente de intensidad hay que realizar la conversión a fuentes de tensión. Si en una rama existiera una fuente de intensidad la cual no puede ser convertida en fuente de tensión, esta intensidad sería un dato.



Por todo lo comentado anteriormente, el método de las mallas se puede decir que formalmente tiene dos fases, la primera sería el planteamiento de las ecuaciones de malla, que le corresponde los siguientes pasos:

1.- Pasar todas las fuentes de intensidad a fuentes de tensión.
2.- Identificar una intensidad de malla con cada malla.
3.- Escribir las condiciones impuestas a las conexiones por la segunda ley de Kirchhoff en función de las intensidades de malla a lo largo de una malla, o sea, escribir la suma de las tensiones a lo largo de una malla.

Y una segunda fase que seria:

4.- Resolver el circuito
5.- Hallar las intensidades de cada una de las ramas (que son las verdaderas incógnitas)

3.3.2.- MÉTODO DE LOS NUDOS

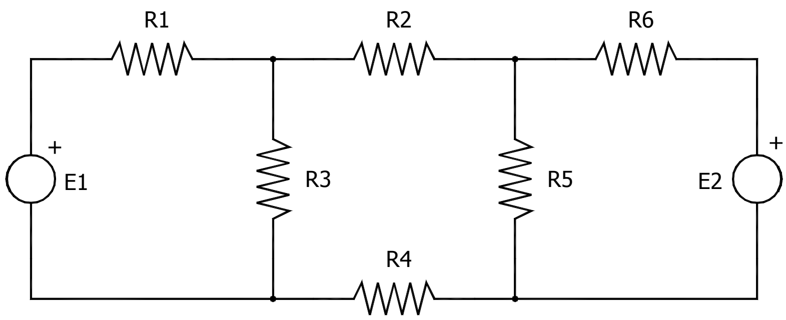
El método de las mallas trata de hallar las corrientes de mallas y después hallar las intensidades de cada una de las ramas, posteriormente es posible hallar las tensiones de cada elemento pasivo o activo de la red.

El método de los nudos trata de determinar las tensiones de los nudos respecto a uno que se elige como referencia para después obtener la tensión respecto a los demás nudos y las intensidades de cada una de las ramas.

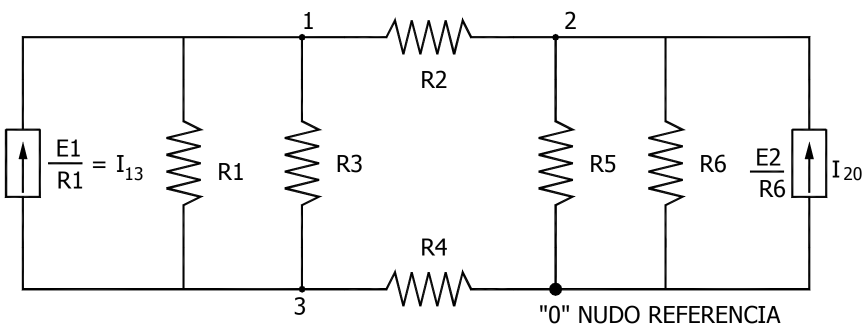
En este método se aplica el primer lema de Kirchhoff $\Sigma I = 0$ a cada uno de los nudos principales menos uno:

NUMERO DE ECUACIONES = N - 1

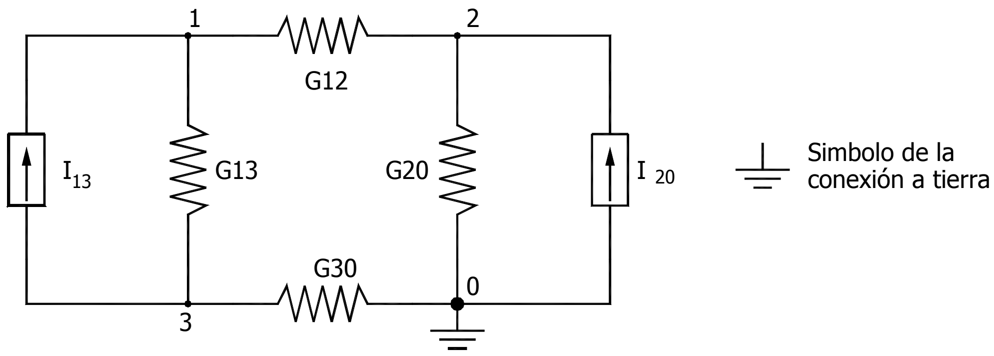
Si elegimos el mismo esquema utilizado en el método de las mallas los pasos a seguir para aplicar el método de los nudos son los siguientes:



1.- *Todas las fuentes de tensión se transforman en fuentes de intensidad y las resistencias en conductancias G = 1/R*



Fuentes de tensión --> Fuentes de intensidad



Resistencias –> Conductancias

Nudo de referencia"0" –> Se conecta a tierra, $U_0 = 0$ V

2.- *Se elige un nudo de referencia en nuestro caso el nudo "0" (ver figura).*

La tensión de cada nudo con respecto al nudo de referencia es U_1, U_2, U_3 (en el caso de n nudos $U_1, U_2, ..., U_{n-1}$) y la tensión entre dos nudos, por ejemplo nudos 1 y 2, $U_{12} = (U_1 - U_0) - (U_2 - U_0) = U_1 - U_2$ siendo U_0 la tensión del nudo de referencia

3.- *Se aplica el primer lema de Kirchhoff a todos los nudos principales menos al de referencia, considerando (+) las intensidades entrantes a los nudos*

Notaciones: $I_1 = I_{13}$ se considera positiva entra al nudo 1

$$R_{13} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}}$$ Resistencia entre 1 y 3

$$G_{13} = \frac{1}{R_{13}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}$$ Conductancia entre 1 y 3

$R_{12} = R_2$ Resistencia entre 1 y 2

$G_{12} = 1/R_2$ Conductancia entre 1 y 2

$R_{10}=\infty$, $G_{10}=0$ no hay unión directa entre 1 y 0

A partir de las notaciones, el **primer lema de kirchhoff** aplicado al nudo 1 sería:

$$I_{13} - U_{12}G_{12} - U_{13}G_{13} = 0$$

sustituyendo los valores U_{12} y U_{13} en función de las tensiones respecto al nudo de referencia obtenemos:

$I_{13} - (U_1 - U_3)\, G_{13} - (U_1 - U_2)\, G_{12} = 0$

despejando

$I_{13} = U_1\, (G_{12} + G_{13}) - U_2\, G_{12} - U_3\, G_{13}$

si generalizamos la ecuación tendremos:

$$\sum_{k=0}^{k=n} I_{1k} = U_1 \sum_{k=0}^{k=n} G_{1k} - \sum_{k=0}^{k=n} U_k\, G_{1k}$$

para los demás nudos tendremos:

Nudo 2: $$\sum_{k=0}^{k=n} I_{2k} = U_2 \sum_{k=0}^{k=n} G_{2k} - \sum_{k=0}^{k=n} U_k G_{2k}$$

Nudo 3: $$\sum_{k=0}^{k=n} I_{3k} = U_3 \sum_{k=0}^{k=n} G_{3k} - \sum_{k=0}^{k=n} U_k G_{3k}$$

Si consideramos las siguientes notaciones:

$I'_1 = \sum_{k=0}^{k=n} I_{1k} =$ Suma de las intensidades debida a todas las excitaciones que concurren en el nudo 1 en nuestro caso $I_{13}(+)$

U_1 = Tensión del nudo 1 respecto al nudo de referencia "0"

$G'_{11} = \sum_{k=0}^{k=n} G_{1k}$ = Conductancia propia del nudo (en nuestro caso $G_{12} + G_{13}$)

$G'_{1k} = - G_{1k} =$ Conductancia mutua del nudo 1 y k (entre el nudo 1 y k) cambiada de signo

las ecuaciones de nudo quedarían:

Nudo 1: $I'_1 = U_1 G'_{11} + \sum_{k=1}^{k=n} U_k G'_{1k}$

Nudo 2: $I'_2 = U_2 G'_{22} + \sum_{k=1}^{k=n} U_k G'_{2k}$

Nudo 3: $I'_3 = U_3 G'_{33} + \sum_{k=1}^{k=n} U_k G'_{3k}$

Y tendríamos un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas. En este caso n - 1 = 3. Lo que obtenemos con este método son tensiones en los nudos con respecto al de referencia, pues son las incógnitas. Es fácil mediante la aplicación de la ley de Ohm hallar los valores de las intensidades de las corrientes de cada rama. Por ejemplo, la intensidad de la corriente que circula entre el nudo 1 y 2 será:

$$I_{12} = (U_1 - U_2)\, G_{12} = U_{12}\, G_{12}$$

El número de ecuaciones de nudos será: "n - 1", igual al número de ramas del "árbol". La economía de cálculo de un método sobre otro (mallas o nudos) dependerá de la topología de la red, que está definida por los valores:

n-1 = ramas del árbol = nº ecuaciones de nudos

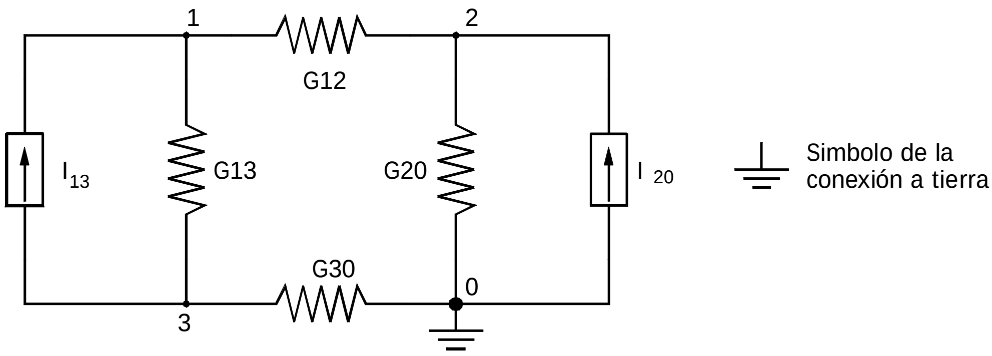
r-n+1 = nº de mallas = nº de ecuaciones de malla.

En forma matricial las ecuaciones anteriores se pueden expresar según la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} G'_{11} & G'_{12} & G'_{13} \\ G'_{21} & G'_{22} & G'_{23} \\ G'_{31} & G'_{32} & G'_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ I'_3 \end{pmatrix}$$

Donde el calculo de U_1, U_2 y U_3 se realiza por la regla de Cramer fácilmente.

Para el esquema de la figura que estamos analizando, los valores de la matriz serán:



$G'_{11} = G_{12} + G_{13}$	$I'_1 = I_{13}$ (+)
$G'_{12} = -G_{12} = G'_{21}$	$I'_2 = I_{20}$ (+)
$G'_{22} = G_{20} + G_{21} + G_{23}$	$I'_3 = I_{31}$ (-)
$G'_{23} = G'_{32} = G_{23} = 0$	
$G'_{33} = G_{30} + G_{31} + G_{32}$	

Generalizando para un circuito con M+1 nudos:

G'_{ii}: Conductancia propia del nudo i. Suma de todas las conductancias que concurren al nudo i

G'_{ik}: Conductancia mutua del nudo i y k (entre i y k) cambiadas de signo

$$\begin{pmatrix} G'_{11} & G'_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & G'_{1m} \\ G'_{21} & G'_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & G'_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G'_{m1} & G'_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & G'_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I'_3 \end{pmatrix}$$

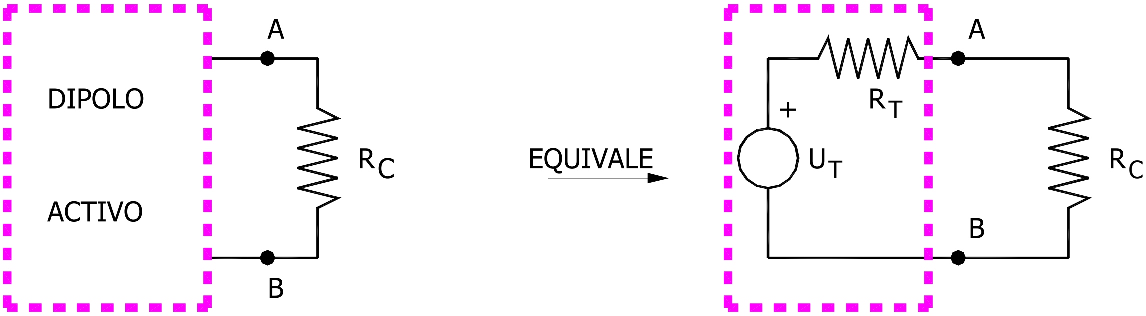
I'_i: suma de todas las intensidades que concurren al nudo i

Ui: Tensión del nudo i respecto al de referencia

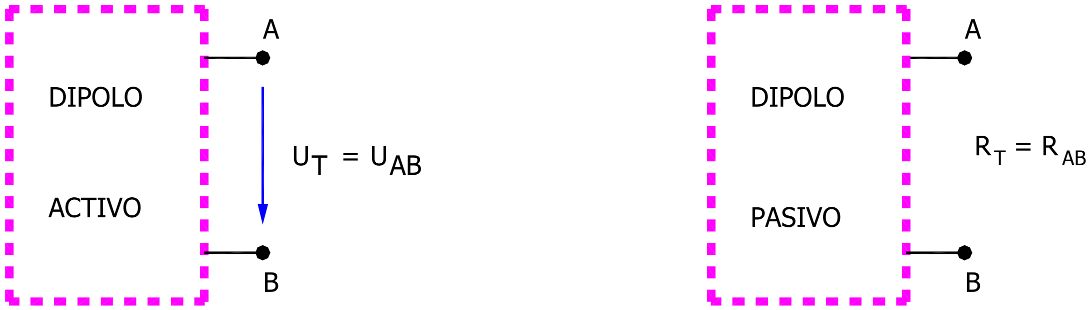
3.3.3.- TEOREMA DE THEVENIN

Cuando al lector, principiante en electricidad, se le dice que un teorema es importante, no es posible decirle hasta que punto lo es. El teorema de Thevenin es la clase de herramienta que distingue al profesional del aficionado, es como una mina de oro para aquellos que saben usarlo.

El teorema de Thevenin puede enunciarse formalmente así: **Cualquier red activa con dos bornes A y B (dipolo) es equivalente a una fuente de tensión de f.e.m. U_T en serie con una resistencia R_T**, o sea equivalente a una fuente real de tensión, $\mathbf{U_T}$, de resistencia interna $\mathbf{R_T}$.



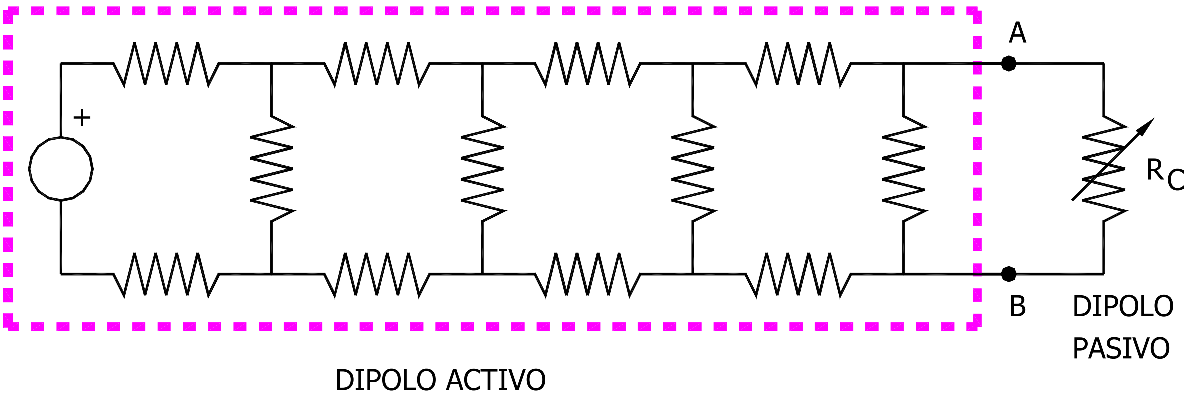
La tensión $\mathbf{U_T}$ será igual a la existente entre los bornes, $\mathbf{U_{AB}}$, a circuito abierto y la resistencia $\mathbf{R_T}$ será la resistencia que existe entre los terminales del dipolo, anulando todas las fuentes de energía.

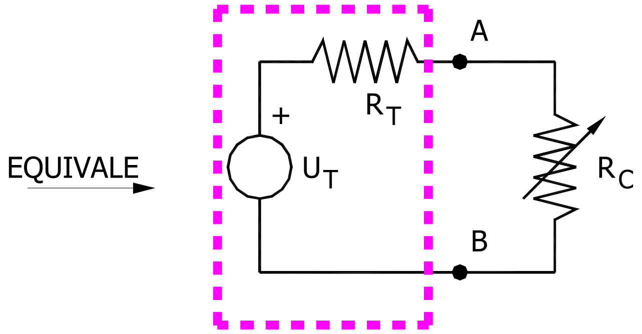


APLICACIÓN: Supongamos un circuito como el de la figura siguiente, donde la carga existente entre A y B es variable, y deseamos conocer la tensión, o la intensidad en bornes de esta carga. Para cada valor de la resistencia del receptor (carga) se tendrá que analizar el circuito y resolver un sistema de ecuaciones, tantas ecuaciones como incógnitas. Ahora bien, si determinamos el equivalente de Thevenin del circuito, para cualquier receptor, es muy fácil calcular la tensión es sus bornes y la intensidad que circula a su través. Estas serán:

$U_{AB} = U_T \; R_C / (R_C + R_T)$ (aplicando división de tensión)

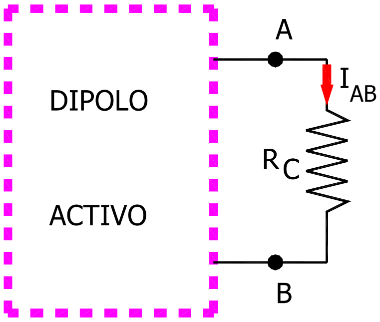
$I_{AB} = U_{AB} / R_{AB} = U_T \; / (R_C + R_T)$ (aplicando la ley de ohm)





DEMOSTRACIÓN:

Sea la carga $\mathbf{R_C}$ que le acoplamos al dipolo para la que interesa calcular la intensidad de la corriente que la recorre.



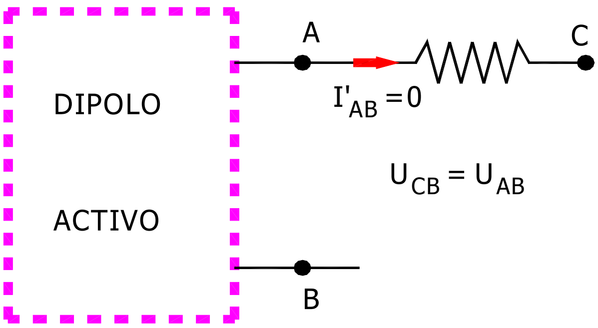
(1)

Si consideramos que el dipolo activo entre **A** y **B** tiene **n** fuentes, nosotros sabemos que la intensidad $\mathbf{I_{AB}}$ será por superposición:

$$I_{AB} = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n$$

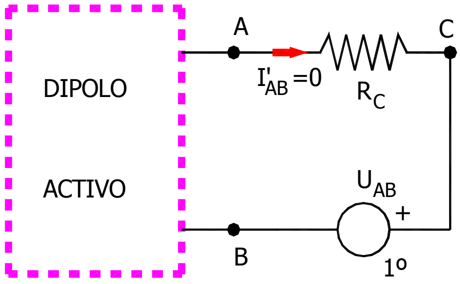
donde : $\mathbf{I_n}$ es la respuesta parcial debido a la fuente **n**, o sea, la intensidad que circula por $\mathbf{R_C}$ cuando solo consideramos la fuente **n** e $\mathbf{I_{AB}}$ intensidad total o respuesta debida a todas las fuentes

Si idealmente se le practica un corte en dicha rama, evidentemente $\mathbf{I'_{AB}=0}$ pero aparecerá una tensión $\mathbf{U_{AB}}$ en los bornes de la rama cortada, que es la que denominamos tensión a circuito abierto.



(2)

Si entre dichos bornes se conecta una fuente ideal de tensión de f.e.m igual a $\mathbf{U_{AB}}$ y de polaridad la indicada en la figura correspondiente (3); Se habrá restablecido la continuidad en el circuito pero seguirá siendo $\mathbf{I'_{AB} = 0}$. En este caso:

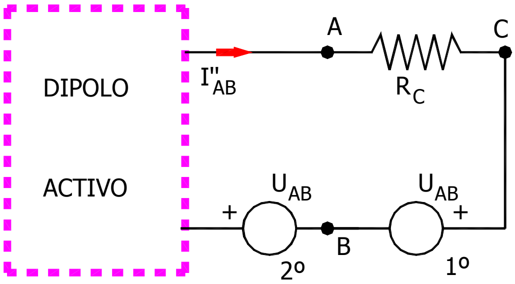


(3)

$$\mathbf{I'_{AB} = 0 = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_N + I_{N+1}}$$

siendo I_{N+1} la respuesta parcial debida a la fuente **n+1**.

Por fin si se conecta una segunda fuente de tensión de igual f.e.m. que la anterior y polaridad contraria a la anterior, pasará por la rama **AB** la corriente $\mathbf{I''_{AB}}$. (se puede observar que (1) y (4) son equivalente por una parte y (2) y (3) por otra)



(4)

Por el principio de la superposición, la respuesta $\mathbf{I_{AB}}$ del circuito (1) será la suma de las respuestas parciales de cada una de las fuentes de energía existentes en el dipolo activo.

$$I_{AB} = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_N.$$

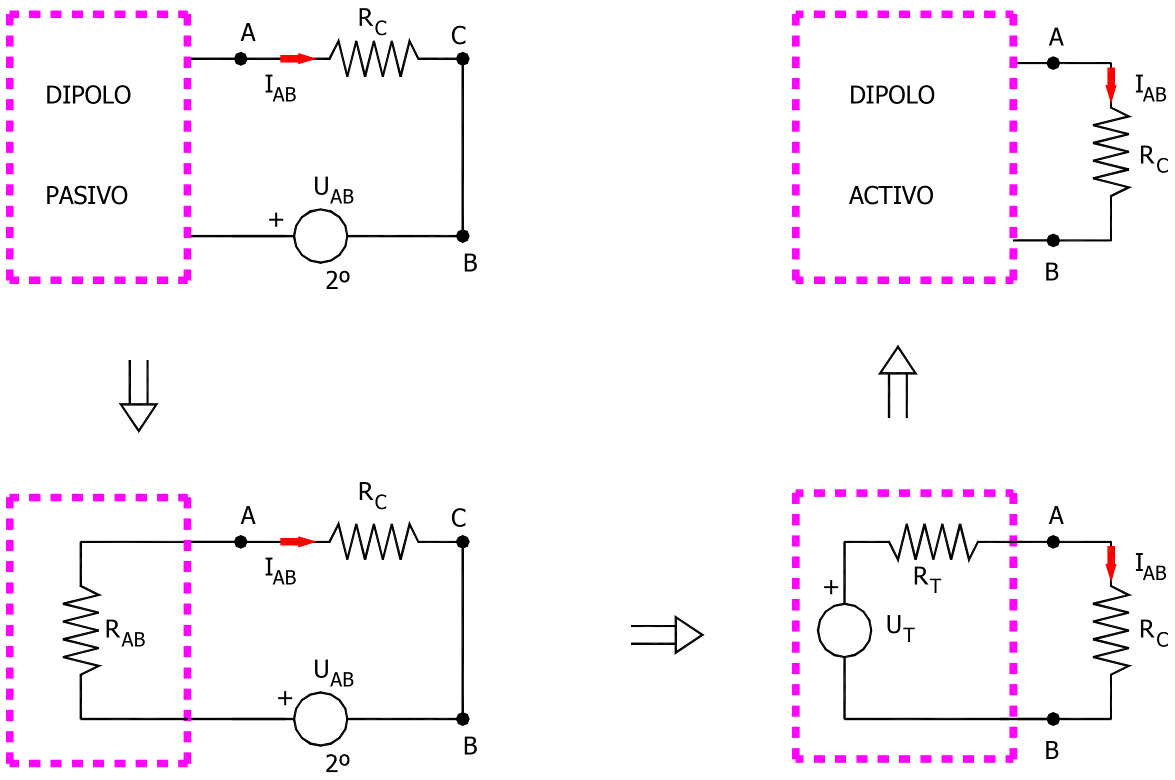
Como (1) y (4) son equivalentes (en (4) se anulan las dos fuentes y quedaría el circuito (1))

$$I_{AB} = I''_{AB} = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_N + I_{N+1} + I_{N+2}$$

ahora bien, la suma de las respuestas de las primeras **n** fuentes más la primera de la ficticia es nula, luego $\mathbf{I_{AB}}$ es la respuesta en la rama **AB** debida a la excitación de la segunda fuente de la tensión ficticia, estando todas las demás anuladas.

$$I_{AB} = I''_{AB} = I_{N+2}$$

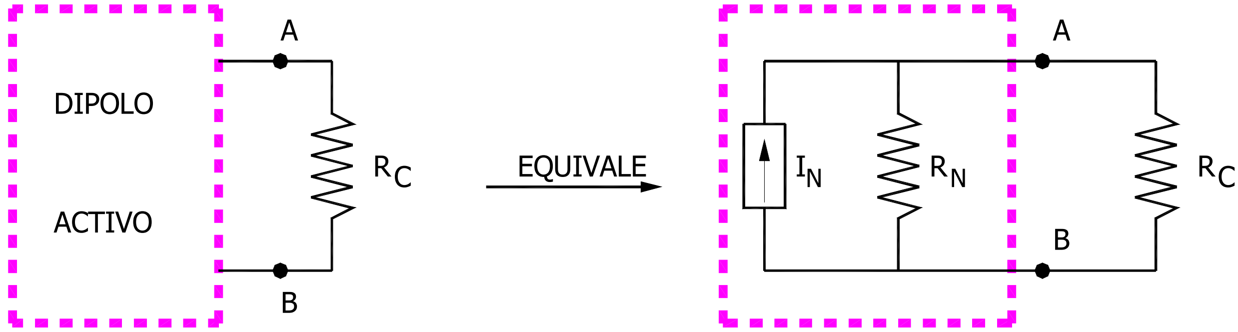
En consecuencia: $\mathbf{U_T = U_{AB}}$ a "circuito abierto" entre **A** y **B** ; y $\mathbf{R_T}$ es la resistencia del dipolo equivalente entre **A** y **B** anulando todas las fuentes de energía.



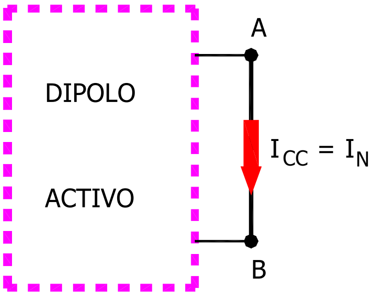
$U_T = U_{AB}$ a circuito abierto
$R_T = R_{AB}$ del dipolo pasivo

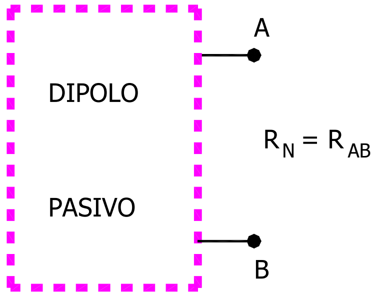
3.3.4.- TEOREMA DE NORTON

El teorema de Norton puede enunciarse formalmente así: **Cualquier red activa con dos bornes A y B (dipolo) es equivalente a una fuente de intensidad I_N en paralelo con una resistencia R_N**, o sea equivalente a una fuente real de intensidad, I_N, de resistencia interna R_N.



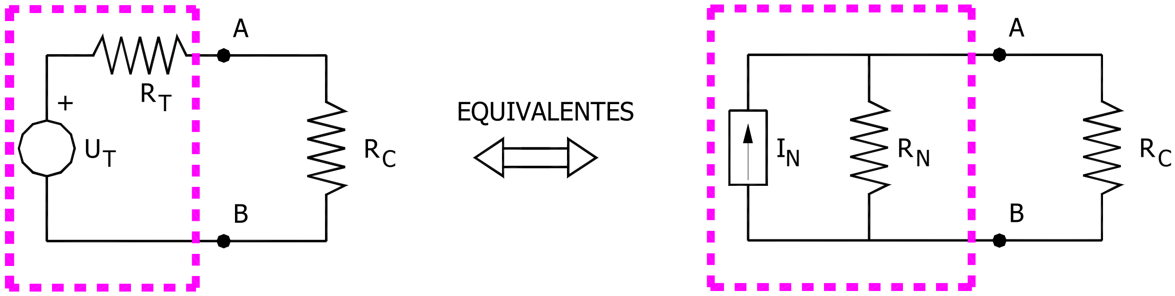
El parámetro característico I_N, será igual a la intensidad que circula entre los bornes **A** y **B** cuando se cortocircuitan ($I_N = I_{CC}$) y la resistencia R_N será la resistencia que existe entre los terminales del dipolo, anulando todas las fuentes de energía.





Los circuitos equivalentes Thevenin y Norton de un dipolo son también, lógicamente, equivalentes entre si. Por lo que si se tiene el equivalente de Thevenin del dipolo la determinación del equivalente de Norton es muy fácil a partir de este. Si convertimos la fuente real de tensión (U_T, R_T) en fuente de intensidad:

$$I_N = I_{CC} = \frac{U_T}{R_T} \qquad ; \qquad R_N = R_T$$



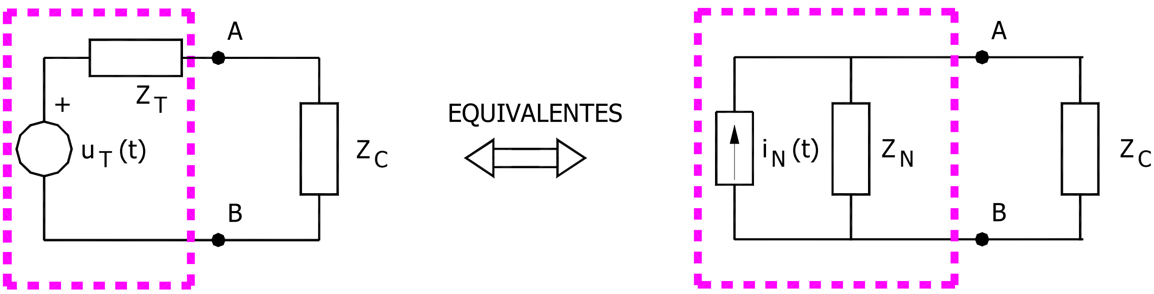
Dipolo equivalente
Thevenin

Dipolo equivalente
Norton

Por lo que no hace falta demostrar el teorema de Norton.

La referencia de la fuente de intensidad debe ser tal que al cortocircuitar los terminales, la intensidad circule con el mismo sentido que lo hacia con el circuito activo.

Realmente esto es una simplificación del teorema de Thevenin y de Norton para corriente continua. En corriente alterna , la resistencia de Thevenin o Norton esta constituida por un dipolo pasivo formado por resistencias, bobinas y condensadores; Una impedancia Z.



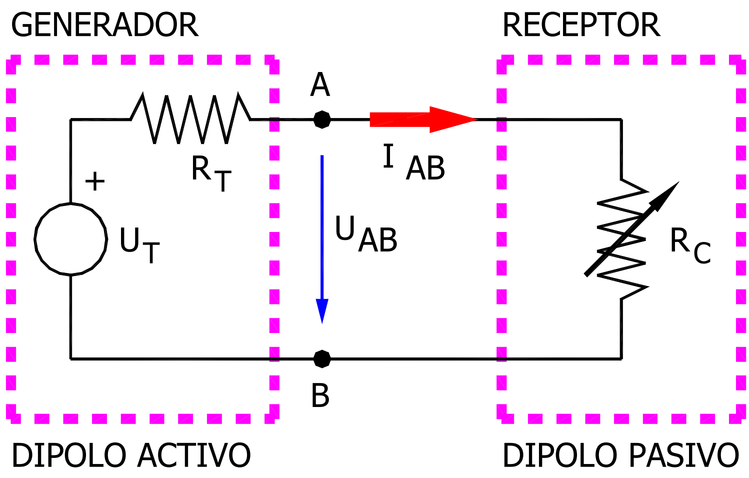
Dipolo equivalente
Thevenin

Dipolo equivalente
Norton

3.4.- TEOREMA DE MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

Todo dipolo activo tiene un equivalente de Thevenin, por lo tanto sabremos cual es la tensión máxima que podremos obtener, $U_{MAX} = U_T$, y la intensidad máxima que nos dará el dipolo, $I_{MAX} = I_{CC}$, pero ¿Cual será la máxima potencia que podremos obtener de un dipolo activo?

Por razón de sencillez, trataremos el caso de una carga variable dada por una resistencia variable como se indica en la figura



Como R_C es variable y la fuente de tensión es fija, tendremos:

- Para $R_C = \infty$, circuito abierto, U_{AB} es máxima: $U_{AB} = U_{MAX} = U_T$
- Para $R_C = 0$, circuito en corto, U_{AB} es mínimo, I_{AB} es máxima: $I_{MAX} = \dfrac{U_T}{R_T} = I_{cc}$

Por división de tensión $U_{AB} = \dfrac{R_C}{R_T + R_C} U_T$

con lo que $I_{AB} = \dfrac{U_{AB}}{R_C} = \dfrac{U_T}{R_T + R_C}$ (ley de Ohm)

La potencia cedida por la fuente a la carga será:

$$P_{AB} = U_{AB} \cdot I_{AB} = \frac{U_T^2 R_C}{(R_T + R_C)^2}$$

y la máxima potencia disponible la obtendremos derivando P_{AB} respecto a R_C e igualando al valor nulo:

$$\frac{\partial P_{AB}}{\partial R_C} = \frac{\left[(R_C + R_T)^2 - 2R_C(R_C + R_T) \right] U_T^2}{(R_C + R_T)^4} = \frac{(R_T^2 - R_C^2)}{(R_C + R_T)^4} U_T^2 = 0$$

Tendremos potencia máxima si $\mathbf{R_T = R_C}$, o sea si la resistencia de la carga es igual a la resistencia de la fuente, siendo la potencia máxima disponible

$$P_{MAX} = \frac{U_T^2}{4R_T}$$

como $\frac{U_T}{R_T} = I_{CC}$ y $U_T = U_{MAX}$ tendremos que:

$$P_{MAX} = \frac{U_T\, I_{CC}}{4} = \frac{U_{MAX}}{2} \cdot \frac{I_{MAX}}{2}$$

en conclusión: **la potencia máxima que obtendremos será el producto de la mitad de la tensión máxima por la mitad de la intensidad de cortocircuito.**

EJEMPLO:

Consideremos una fuente de alimentación de 12 V con una resistencia interna de 12 Ω.

1.- Determinar las máximas señales disponibles de la fuente.

2.- Calcular la potencia cedida a:

A) una resistencia de: 1 Ω

B) una resistencia de: 100.000 Ω

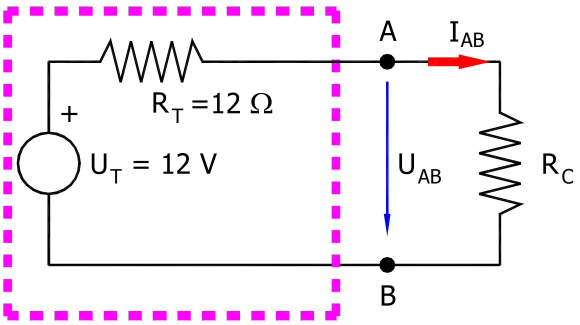
C) una resistencia de: 12 Ω

Solución:

1.- $U_{MAX} = U_T = 12$ V

$I_{MAX} = I_{CC} = \frac{U_T}{R_T} = 1$ A

$P_{MAX} = \frac{U_{MAX} \cdot I_{MAX}}{4} = \frac{12 \times 1}{4} = 3$ W



2.- A) Por división de tensión $U_{AB} = 12 \frac{1}{12+1} = \frac{12}{13} = 0{,}923$ V $< U_{MAX}$

Por la ley de Ohm: $I_{AB} = \frac{0{,}923}{1} = 0{,}923$ A $< I_{MAX}$

La potencia cedida por la fuente a la resistencia de 1 Ω será:

$$P_{AB} = R_C \cdot I^2_{AB} = 1 \text{ x } 0{,}923^2 = 0{,}852 \text{ W}$$

B) $$U_{AB} = 12 \frac{100.000}{12 + 100.000} = 11{,}99 \text{ V} < U_{MAX}$$

$$I_{AB} = \frac{11{,}99}{100.000} = 1{,}199 \times 10^{-4} \text{ A} < I_{MAX}$$

La potencia cedida por la fuente a la resistencia de 100 KΩ será:

$$P_{AB} = R_C \cdot I^2_{AB} = 1{,}438 \times 10^{-4} \text{ W}$$

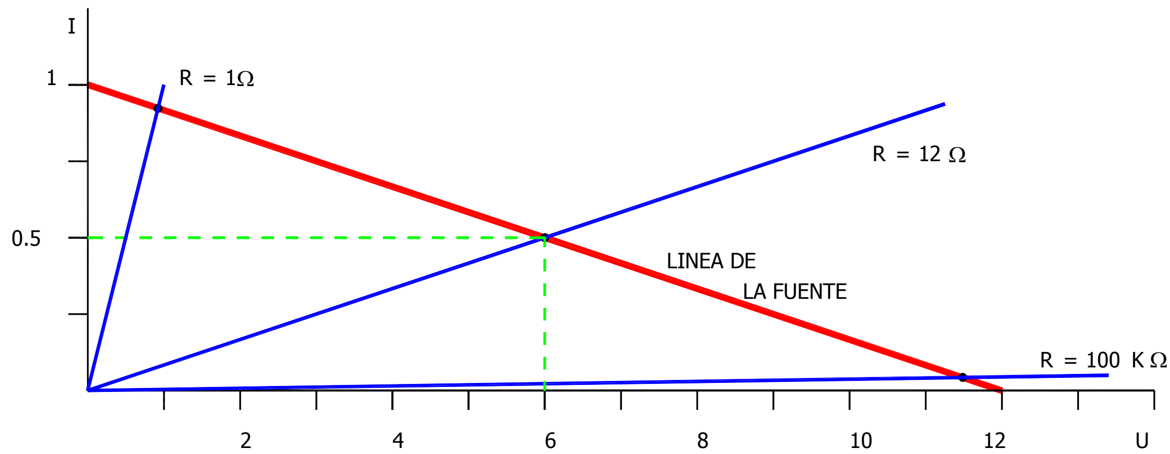
C) $$U_{AB} = 12 \frac{12}{12+12} = \frac{12}{2} = 6 \text{ V} < U_{MAX}$$

$$I_{AB} = \frac{6}{12} = 0{,}5 \text{ A} < I_{MAX}$$

La potencia cedida por la fuente a la resistencia de 12 Ω será la máxima:

$$P_{AB} = R_C \cdot I^2_{AB} = 3 \text{ W}$$

Los puntos de funcionamiento de la fuente y cargas se pueden ver en la figura:



y la ecuación característica i-u de la fuente será: $U_{AB} = f(I_{AB}) = 12 - 12\, I_{AB}$

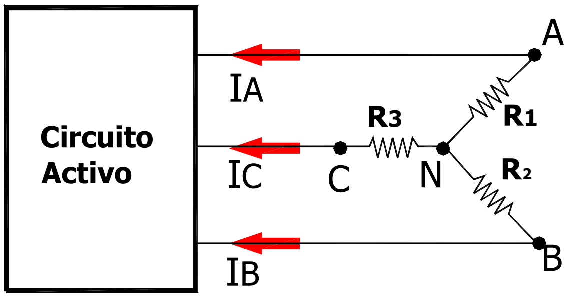
$I_{AB} = f(U_{AB}) = 1 - U_{AB}/12$

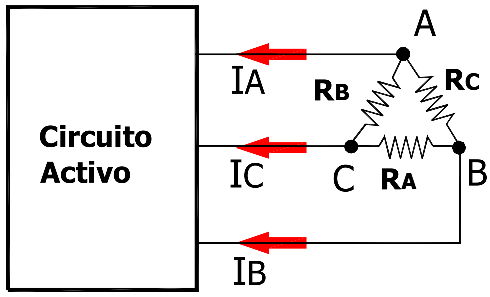
3.5.- MÉTODOS PARA TRANSFORMAR CIRCUITOS

Los métodos para transformar circuitos ya vistos son los siguientes: A) Sustitución de elementos pasivos: SERIE, PARALELO,...; B) Conversión de fuentes de tensión en fuentes de corriente y viceversa; C) Sustitución de elementos activos: Serie, Paralelo (Teorema de Millman: Sustitución de "n" fuentes de tensión en paralelo por una sola mediante transformaciones intermedias de fuentes de tensión en fuentes de corriente y viceversa).

Otro sistema para transformar circuitos es el denominado TEOREMA DE KENNELLY (Transformación Estrella->Triángulo, Triángulo -> Estrella)

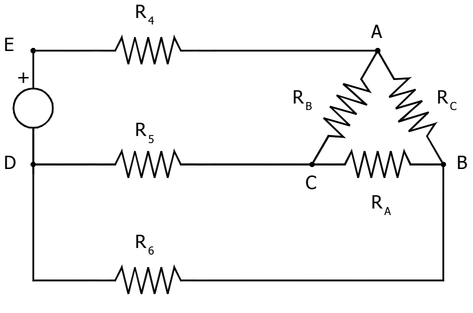
TEOREMA DE KENNELLY:



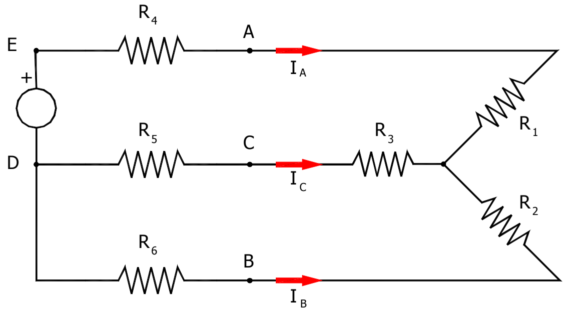


Este teorema dice que podemos sustituir las resistencias entre tres nudos A, B y C, si están conectados en "triángulo" por otras resistencias en "estrella" (y al revés) sin que el resto del circuito sufra perturbación alguna, lo que obliga a que las intensidades de las corrientes que entren o que salgan por los nudos A, B y C no varíen y que así mismo permanezca invariable las tensiones entre los mismos.

NECESIDAD: Para ver la necesidad de convertir una conexión triángulo en su estrella equivalente, supongamos el circuito de la figura izquierda en el cual, queremos hallar la resistencia equivalente entre E y D.

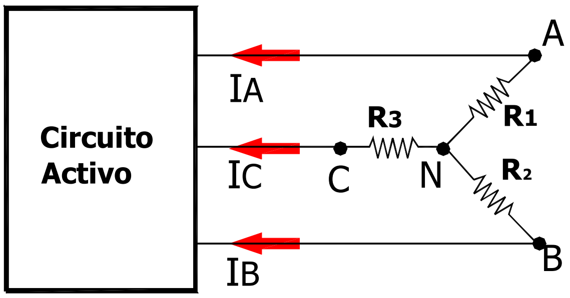


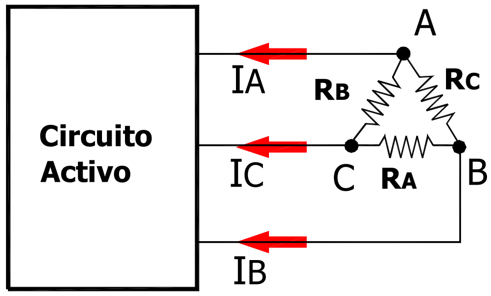
$\Longrightarrow$



Nos encontramos con un problema y es que no se puede simplificar las resistencias en el triángulo pues no están ni en serie ni en paralelo, pero si se pueden sustituir por una red equivalente de tres resistencias en estrella (fig. de la derecha), y tendríamos que R_1 está en serie con R_4 como R_5 con R_3 y también R_6 con R_2, y por los procesos ya conocidos se podrán agrupar estas tres resistencias fácilmente y convertirlo en una sola resistencia.

DEMOSTRACIÓN: Nosotros podremos hacer la transformación (estrella-triángulo), siempre que el circuito exterior conectado a los terminales A, B, y C no sufran perturbación alguna.





Por lo que dicha equivalencia quedará probada si las intensidades I_A, I_B y I_C, salientes de los nudos, son iguales en las dos configuraciones para cualquier conjunto de tensiones entre dichos terminales.

Si tomamos como nudo de referencia el punto C y aplicamos la ecuación de nudos (1ª ley de kirchhoff) al punto N de la estrella, se tendrá:

$$(G_1 + G_2 + G_3)\, U_N - G_1\, U_A - G_2\, U_B - G_3\, U_C = 0 \qquad (1)$$

siendo G_1, G_2, G_3 las conductancias de las respectivas resistencias y U_A, U_B, U_C, U_N los potenciales de los nudos con respecto al de referencia.

Como sabemos: $U_{NC} = U_N = R_3\, I_C = \dfrac{I_C}{G_3}$

que sustituyendo en (1) y despejando I_C obtendremos:

$$I_C = \frac{(G_1\, U_A + G_2\, U_B)\, G_3}{(G_1 + G_2 + G_3)}$$

que debe ser la misma que sale de la configuración triángulo:

$I_C = U_A\, G_B + U_B\, G_A$ (1ª ley de Kirchhoff al nudo C) si igualamos.

$$U_A\, G_B + U_B\, G_A = \frac{(G_1\, U_A + G_2\, U_B)\, G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{G_1\, G_3}{G_1 + G_2 + G_3}\, U_A + \frac{G_2\, G_3}{G_1 + G_2 + G_3}\, U_B$$

Comparando, se deduce que para que se cumpla esta ecuación para cualquier valor de U_A y U_B se deberá cumplir que:

$$G_A = \frac{G_2\, G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \qquad (2)$$

$$G_B = \frac{G_1\, G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \qquad (3)$$

Análogamente, se podría averiguar que:

$$G_C = \frac{G_1\, G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \qquad (4)$$

Si estas expresiones la ponemos en forma de resistencias quedará:

$$\boxed{R_A = R_2\, R_3\, (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})} \qquad (5)$$

$$\boxed{R_B = R_1\, R_3\, (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})} \qquad (6)$$

$$\boxed{R_C = R_1\, R_2\, (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})} \qquad (7)$$

que son las ecuaciones que permite el cálculo de las resistencias del triángulo equivalente conocida las de la estrella.

Si $R_1 = R_2 = R_3 = R_\lambda$ resulta que, $R_A = R_B = R_C = R_\Delta = 3\, R_\lambda$.

De la ecuaciones obtenidas despejando R_1, R_2 y R_3 obtenemos las ecuaciones que nos permiten el cálculo de las resistencias de la estrella equivalente del triángulo, estas son:

$$\boxed{R_1 = \frac{R_B\,R_C}{R_A + R_B + R_C}}$$

$$\boxed{R_2 = \frac{R_C\,R_A}{R_A + R_B + R_C}}$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R_A\,R_B}{R_A + R_B + R_C}}$$

El proceso seguido es el siguiente: De las ecuaciones (5), (6), (7) podemos obtener que: $R_A\,R_1 = R_B\,R_2 = R_C\,R_3$, por lo tanto:

$$R_1 = R_3\,\frac{R_C}{R_A} \qquad \text{y} \qquad R_2 = R_3\,\frac{R_C}{R_B}$$

que sustituyendo en la ecuación (7) por ejemplo dará:

$$R_C = R_3^2\,\frac{R_C^2}{R_A\,R_B}\left(\frac{R_A}{R_C\,R_3} + \frac{R_B}{R_C\,R_3} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{R_3^2\,R_C^2}{R_A\,R_B}\left(\frac{R_A + R_B + R_C}{R_C\,R_3}\right)$$

$$1 = \frac{R_A + R_B + R_C}{R_A\,R_B}\,R_3 \qquad \text{–>} \qquad R_3 = \frac{R_A\,R_B}{R_A + R_B + R_C}$$

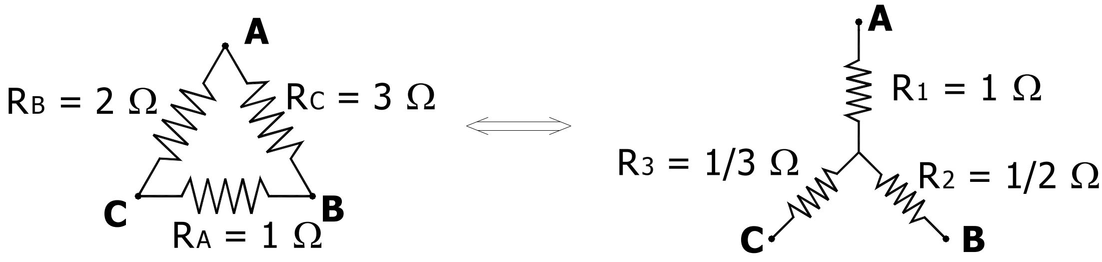
de igual manera podríamos sacar R_1 y R_2 que valdrán:

$$R_1 = \frac{R_B\,R_C}{R_A + R_B + R_C} \quad ; \quad R_2 = \frac{R_A\,R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

que son las ecuaciones que nos permite el cálculo de las resistencias de la estrella equivalente a un triángulo.

Si $R_A = R_B = R_C = R_T$ resulta que $R_1 = R_2 = R_3 = R_E = 1/3\ R_T$

Ejemplo:



TRIANGULO **ESTRELLA**

Si R_A=1 Ω, R_B=2 Ω, R_C=3 Ω las resistencias equivalentes en estrella serán:

$$R_1 = \frac{R_B\, R_C}{R_A + R_B + R_C} = \frac{2 \times 3}{1 + 2 + 3} = 1\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_A\, R_C}{R_A + R_B + R_C} = \frac{3 \times 1}{1 + 2 + 3} = \frac{1}{2}\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{R_A\, R_B}{R_A + R_B + R_C} = \frac{1 \times 2}{1 + 2 + 3} = \frac{1}{3}\ \Omega$$

Si R_1=1 Ω, R_2=1/2 Ω, R_3=1/3 Ω las resistencias equivalentes en triángulo valdrán:

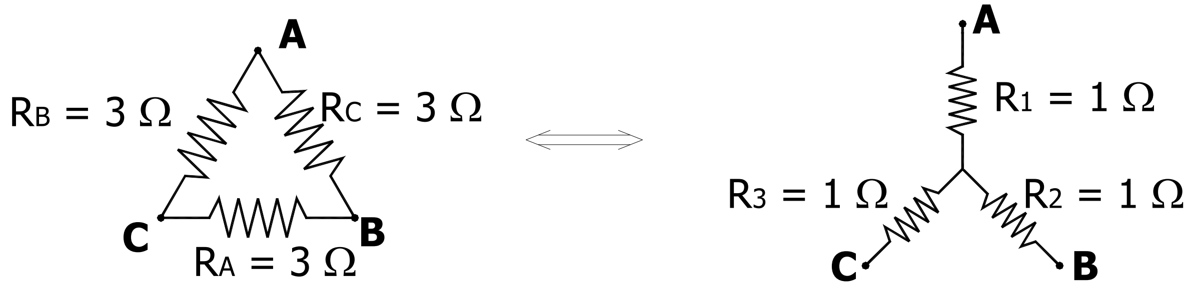
$$R_A = R_2\, R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/3}\right) = 1\ \Omega$$

$$R_B = R_1\, R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = 1\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/3}\right) = 2\ \Omega$$

$$R_C = R_1\, R_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = 1\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/3}\right) = 3\ \Omega$$

Resultados lógicamente coincidentes con los datos de partida para la conversión triángulo ---> estrella

Ejemplo:



TRIANGULO **ESTRELLA**

Si R_A=3 Ω, R_B=3 Ω, R_C=3 Ω las resistencias equivalentes en estrella serán:

$$R_1 = \frac{R_B\, R_C}{R_A + R_B + R_C} = \frac{3 \times 3}{3 + 3 + 3} = 1\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_A\, R_C}{R_A + R_B + R_C} = \frac{3 \times 3}{3 + 3 + 3} = 1\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{R_A\, R_B}{R_A + R_B + R_C} = \frac{3 \times 3}{3 + 3 + 3} = 1\ \Omega$$

Si $R_A = R_B = R_C = R_T$ resulta que $R_1 = R_2 = R_3 = R_E = 1/3\ R_T$

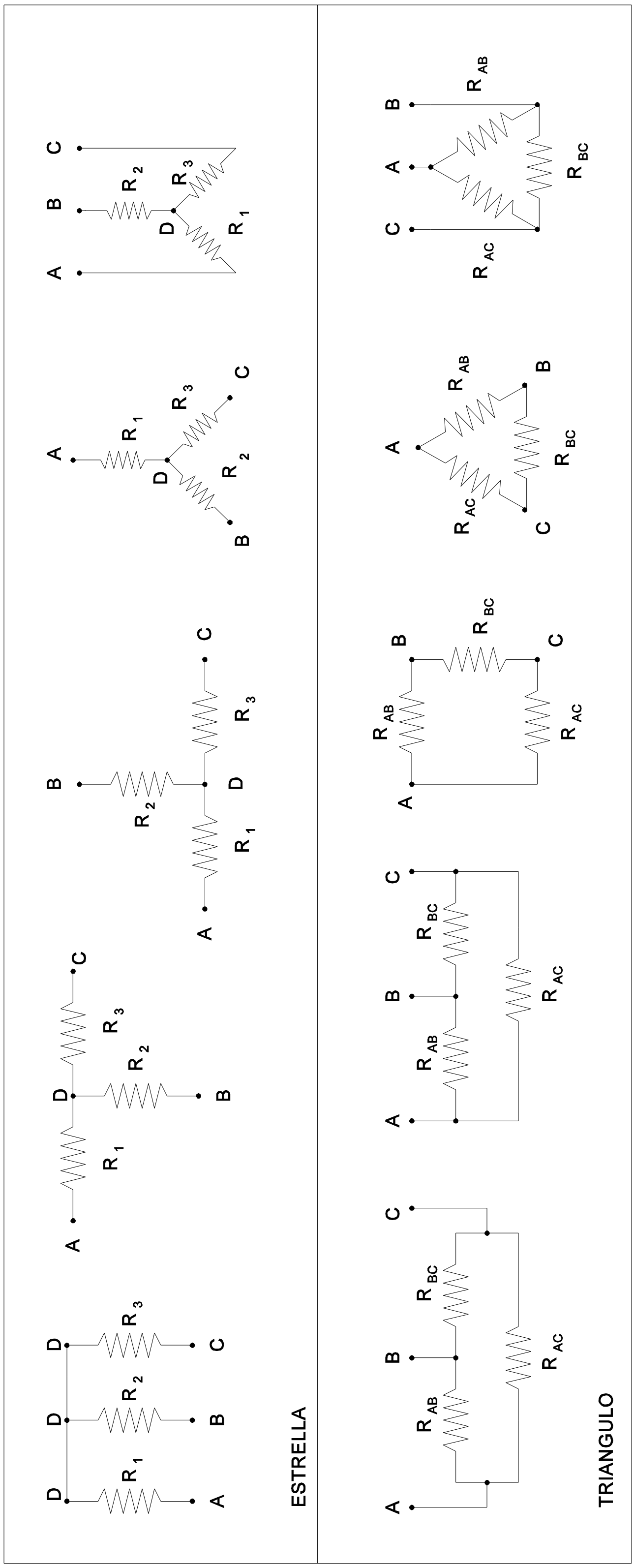
Si R_1=1 Ω, R_2=1 Ω, R_3=1 Ω las resistencias equivalentes en triángulo valdrán:

$$R_A = R_2\, R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = 1 \times 1 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) = 3\ \Omega$$

$$R_B = R_1\, R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = 1 \times 1 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) = 3\ \Omega$$

$$R_C = R_1\, R_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = 1 \times 1 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) = 3\ \Omega$$

Si $R_1 = R_2 = R_3 = R_\lambda$ resulta que, $R_A = R_B = R_C = R_\Delta = 3\ R_\lambda$.



Distintas formas de presentarse una
estrella o triángulo en los circuitos eléctricos.